

Majorana fermioni

Barčot, Doris

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:194:573714>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-29**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Physics - PHYRI Repository](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

ODJEL ZA FIZIKU

Diplomski studij Fizika



Doris Barčot

Majorana fermioni

Diplomski rad

Rijeka, 2022

SVEUČILIŠTE U RIJECI

ODJEL ZA FIZIKU

Diplomski studij Fizika

Astrofizika i fizika elementarnih čestica



Doris Barčot

Majorana fermioni

Diplomski rad

Mentor: prof. dr. sc. Predrag Dominis Prester

Rijeka, 2022

Sadržaj

Popis slika	1
Uvod	2
1 Fundamentalni koncepti	4
1.1 Diracova jednadžba i koncept antičestice	4
1.2 Lijevi ili desni ?	8
1.2.1 Weylova reprezentacija	8
1.2.2 Majorana reprezentacija	9
2 Mikroskopski opis supravodljivosti	12
2.1 Cooperovi parovi	12
2.2 BCS teorija supravodljivosti	15
2.2.1 BCS osnovno stanje	20
2.2.2 Funkcija energijskog procijepa	23
3 Majorana fermioni u fizici kondenzirane tvari	26
3.1 Majorana nul modovi	29
3.2 Jednodimenzionalni model - Kitaev lanac	32
3.2.1 Topološka invarijanta	37
3.2.2 Majorana modovi	39
3.3 2D p+ip kiralni supravodič	43
3.3.1 Topološka invarijanta	46
3.3.2 Majorana modovi	48
3.3.3 <i>Intermezzo</i> - kvantni vrtlozi	51
4 Fizikalne implementacije	56
4.1 1D supravodiči p-tipa	57
4.1.1 Efektivna akcija	58
4.2 2D supravodiči p-tipa	63
4.3 Fu-Kane model	63

5	Majorana modovi i topološka kvantna računala	70
5.1	Fermionska kvantna računala	71
5.2	Neabelova statistika u dvije dimenzije	72
6	Zaključak	81
A	Dodaci	83
A.1	Fourierova transformacija Kitaeva hamiltonijana	83
A.2	Prelazak u polarne koordinate za 2D supravodič	84
A.3	Jednadžba svojstvenih vrijednosti za 2D p+ip supravodič u polarnim ko- ordinatama	85
A.4	Identiteti korišteni u efektivnoj akciji	86

Sažetak

1937. godine je talijanski fizičar, Ettore Majorana, pokazao kako postoje realna rješenja Diracove jednadžbe. Realnost rješenja implicirala je postojanje Majorana fermiona, kao čestice koja je vlastita antičestica. Do sada, niti jedna poznata fundamentalna čestica nije Majorana fermion. Osim u čestičnoj fizici, Majorana fermioni postali su predmet zanimanja u fizici kondezirane materije, kao kvazičestična pobuđenja u supravodljivim sustavima s netrivialnom topologijom. U ovom radu ćemo istražiti topološke jednodimenzionalne i dvodimenzionalne sustave i pokazati na koji način se Majorana fermioni pojavljuju u teorijama supravodljivosti p-tipa. S obzirom da su takvi sustavi u prirodi rijetki, pokazat ćemo na koji način je moguće konstruirati takve egzotične supravodiče formirajući heterostrukture s uobičajenim s-tipom, gdje ćemo se fokusirati na pionirski Fu-Kane model. Na kraju, raspravljat ćemo o najintragantnijem aspektu Majorana kvazičestičnih pobuđenja - neabelovoj statistici, na kojoj se temelji budućnost kvantnih računala.

Ključne riječi: Majorana fermioni, BCS teorija, BdG formalizam, topološki supravodiči, Majorana nul modovi, neabelova statistika, topološka kvantna računala

Popis slika

2.1	Formiranje Cooperovog para (Wikimedia Commons)	13
2.2	Energijski spektar normalnog i supravodljivog stanja [14]	20
3.1	Faze Kitaeva lanca (edX platforma, Topology in Condensed Matter)	35
3.2	Kinetička energija Kitaeva modela [18]	36
3.3	Mapiranje Brillouinove zone na jediničnu sferu [18]	38
3.4	Vežanje Majorana fermiona u Kitaevu lancu [38]	41
3.5	Kinetička energija p+ip supravodiča bez spina [18]	45
3.6	Vežanje fermiona u realnom i impulsnom prostoru (Harvard.edu)	46
3.7	Trivijalna i topološka faza kiralnog p+ip supravodiča [18]	47
3.8	Geometrija kiralnih Majorana modova i energijski spektar [18]	50
3.9	Prodiranje magnetnog polja kroz supravodič tipa II [41]	51
3.10	Probijanje magnetskog polja kroz p+ip supravodič [18]	53
3.11	Konfiguracija s dva vrtloga [18]	54
4.1	Spektar energije sa i bez T-simetrije [18]	65
4.2	Rubna stanja 2D topološkog izolatora - Diracov stožac [31]	67
5.1	Vizualizacija procesa zamjene Majorana modova [38]	74
5.2	Grafički prikaz pletenja Majorana modova [38]	76
5.3	Uzastopno pletenje Majorana modova [38]	78
5.4	Blochova sfera (Wikipedia)	79

Uvod

Ideja Majorana fermiona seže još iz 1937. godine kada je Ettore Majorana specijalnim odabirom γ matrica u Diracovoj teoriji elektrona pokazao kako se mogu konstruirati isključivo realna polja. U fizici visokih energija, Majorana fermioni su čestice koje su vlastite antičestice. Još uvijek nije jasno postoje li elementarne čestice koje su Majorana fermioni, no formalizam je našao mnoge primjene pa tako danas postoji nekoliko kandidata za Majorane, među kojima su svakako najizgledniji neutriini. Proces dvostrukog β -raspada, koji objašnjava proces leptogeneze, moguć je samo ako su neutriini masivne Majorana čestice. Također, supersimetrične teorije pretpostavljaju da bozonske čestice imaju odgovarajuće Majorana superpartnere. Osim u čestičnoj fizici, Majorana fermioni su našli primjenu u fizici kondezirane materije kao kvazičestična pobuđenja u topološkim supravodičima p-tipa. U fizici kondezirane materije topologija igra važnu ulogu u netrivialnim strukturama u prostoru, kao što su kvantni vrtlozi, kojih ćemo se dotaknuti u ovom radu. Prvi primjer topološke netrivialnosti u tzv. *bulk* sustavima, koja je izvor topoloških faza, otkriven je 1982. (Thouless, Kohmoto, den Nijs i Nightingale) kada je pronađena veza između topološke invarijante i Hallove vodljivosti u kvantnom Hallovom efektu. U kontrastu s topološkim netrivialnostima u prostoru, topološke faze karakterizirane su netrivialnostima u Hilbertovom prostoru stanja. Do danas, pronađeni su mnogi sustavi koji realiziraju topološke faze (Volovik, Haldane, Kane-Mele), a od najvećeg značaja u ovom radu bit će topološki supravodiči. U topološkim supravodičima netrivialna struktura potiče od faze koju poprimi tzv. parametar uređenja kada sustav izložimo cikličkom adijabatskom procesu, a posljedica je geometrijskih svojstava parametarskog prostora hamiltonijana. Jedna od ključnih manifestacija topološkog reda je degeneracija mnogostrukosti osnovnog stanja. Degeneracija je topološka u smislu da nikakvom lokalnom perturbacijom ne možemo promijeniti osnovno stanje pa je ono topološki zaštićeno. U BCS teoriji supravodljivosti, koju ćemo detaljno opisati u drugom poglavlju, parametar reda je energijski procijep, a može se interpretirati kao energija vezanja Cooperovih parova, koji su osnova mikroskopske teorije supravodljivosti. Vrijednost parametra reda karakterizira različite faze sustava. Jedna od najvažnijih posljedica netrivialnih topoloških struktura u supravodiču je postojanje Majorana fermiona kao Bogolyubovih kvazičestica na nultoj energiji (Majorana nul modovi). Zbog simetrije između čestica i šupljina u supravodljivom stanju, jednočestično stanje na nultoj energiji mora biti ravnomjerna superpozicija elektrona i šupljine. Ovo

implicira da je hermitski konjugat ovog stanja isto to stanje, ili drugim riječima, čestica je jednaka svojoj antičestici. Majorane u fizici kondezirane tvari privukle su veliki interes, većinom zbog njihove netrivialne statistike – prilikom uzastopnih zamjena čestica, redosljed je od ključne važnosti. Operacije zamjene nisu komutativne pa statistički Majorane opisujemo kao neabelove anione (u 2D prostoru). Ovo je potpuno drugačije od svih drugih poznatih čestica gdje je prilikom zamjene položaja dovoljno pomnožiti valnu funkciju s ± 1 , ovisno radi li se o bozonskim ili fermionskim česticama. Ono što je važno spomenuti, a o čemu raspravljamo u trećem poglavlju ovog rada, jest da se svaki fermion može matematički rastaviti na par Majorana, što zapravo odgovara rastavljanju fermiona na realnu i imaginarnu komponentu, no ovaj postupak dobiva fizikalni smisao tek kada Majorane, odnosno "polovice fermiona", možemo prostorno udaljiti tako da se njihove valne funkcije ne preklapaju. Prostorno odvojene Majorane možemo opisati kao visoko delokalizirano fermionsko stanje koje je imuno na većinu tipova dekoherencije, s obzirom da lokalne perturbacije utječu na samo "polovicu" elektrona. Upravo zbog imunosti na dekoherenciju i netrivialne statistike, Majorana fermioni obećavaju kao temelj tzv. topoloških kvantnih računala, koja bi mogla obavljati milijune puta više operacija istovremeno od običnih računala. O ovome raspravljamo u posljednjem poglavlju rada. Iako nećemo raspravljati o načinima detekcije Majorana fermiona, u četvrtom poglavlju opisat ćemo primjere konstrukcije sustava koji imaju potencijala realizirati supravodljivost p-tipa, a samim time i Majorana kvazičestice.

Formalizam Majorana fermiona našao je teoretsku primjenu u širokim područjima fizike, pitanje koje ostaje je tko će ih prvi detektirati - fizičari elementarnih čestica ili kondezirane materije?

1 Fundamentalni koncepti

U ovom dijelu rada dat ćemo kratak pregled ideje Majorana fermiona, nastale u kontekstu fizike visokih energija. Diracova relativistička jednadžba za fermionsko polje [1] označila je 1928. početak revolucije u kvantnoj fizici. Njena rješenja vodila su na postojanje čestica jednake mase kao elektron, no suprotnog naboja. Godinu dana nakon što je Dirac objavio svoju teoriju elektrona, H. Weyl pokazuje kako se za bezmasene, spin $1/2$ fermione može konstruirati jednostavnija jednadžba koja uključuje dvokomponentno, umjesto četverokomponentno polje [2]. Nekoliko mjeseci kasnije, W. Pauli predlaže postojanje neutrina kako bi objasnio kontinuirani energijski spektar elektrona koji nastaju prilikom beta raspada [3]. Zbog očuvanja naboja, neutrimi moraju biti neutralni, a analiza tadašnjih podataka dobivenih iz eksperimenata s beta raspadom ukazivala je kako su neutrimi bezmaseni. Prirodno je bilo zaključiti kako se radi o Weylovim fermionima, no, kako neutrimi ne nose naboj, postojala je mogućnost i da su vlastite antičestice. Opis takvih fermionskih polja dao je Ettore Majorana 1937. godine. Kako je sve ukazivalo na to da su neutrimi bezmaseni, Majorana polje je gledano kao matematička konstrukcija bez fizikalnog uporišta sve do 1957. kada B. Pontecorvo predviđa oscilacije neutrina. Ako neutrimi osciliraju onda imaju masu pa ne mogu biti Weylovi fermioni. Ovo je otvorilo diskusiju jesu li neutrimi Diracovi ili Majorana fermioni. Osim zbog mogućnosti da opisuju neutrine, Majorana fermioni su postali važni u čestičnoj fizici pojavom teorije supersimetrije koja zahtijeva postojanje Majorana fermiona kao partnera spin-0 ili spin-1 bozonskih polja. Iako nijedna poznata čestica nije Weylov fermion, koncept se pokazao vrlo koristan - Weylove spinore možemo promatrati kao građevne jedinice za bilo koje fermionsko polje, kao što ćemo vidjeti u nastavku ovog poglavlja.

1.1 Diracova jednadžba i koncept antičestice

Postoji veliki broj optimalnih startnih pozicija za konstrukciju Diracova polja za čestice spina $\frac{1}{2}$, mi ćemo skicirati Diracovu ideju konstrukcije spinornog polja koje nas nametanjem uvjeta realnosti vodi na Majorana fermione. Krećemo od Einsteinove jednadžbe, koja danas već spada u pop kulturu 20. stoljeća

$$E^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4, \quad \mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) \quad (1.1)$$

gdje zamjenom energije i impulsa s operatorima $E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $p \rightarrow -i\hbar\nabla$ dobivamo Klein-Gordonovu jednadžbu

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0 \quad (1.2)$$

koja opisuje skalarna polja, odnosno čestice spina 0. Problem s ovom jednadžbom je taj što je kvadratna u derivaciji po vremenu što dovodi do pozitivnih i negativnih energija. Danas znamo da postoje čestice i antičestice pa u tom smislu negativne energije nisu problematične, ali vode na negativnu normu što znači da njen kvadrat ne možemo interpretirati kao gustoću vjerojatnosti, kao što je to bilo u slučaju Schrödingerove jednadžbe. Kako bi izbjegao ovaj problem, Dirac je linearizirao K-G teoriju tako što je relativističku disperzijsku relaciju zapisao na sljedeći način

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = c\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta mc^2 \quad (1.3)$$

odnosno, dao je generalnu formu hamiltonijana

$$H_{\text{Dirac}}\Psi = (c\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta mc^2)\Psi \quad (1.4)$$

uz standardne kvantnomehaničke zamjene za energiju i impuls, a $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$, i β su zasad nepoznati koeficijenti. Ono što jednadžba polja treba zadovoljavati jest da bude Lorentz kovariantna i konzistentna s disperzijskom relacijom te da dopušta probabilističku interpretaciju valne funkcije. Ova dva uvjeta mogu biti zadovoljena samo ako su $\boldsymbol{\alpha}$ i β 4x4 antikomutirajuće matrice koje zadovoljavaju sljedeće uvjete

$$\begin{aligned} \alpha_x^2 &= \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = \mathbb{I} \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 2\delta_{ij} \\ \{\alpha_i, \beta\} &= 0 \end{aligned}$$

Matrice nisu jednoznačno određene, a uobičajen izbor jesu Paulijeve matrice.

$$\alpha_i \equiv \sigma_x \otimes \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \sigma_z \otimes \mathbb{I} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Dakle, eliminacija kvadratnog korijena uz poštivanje principa kvantne teorije i specijalne relativnosti vodi na matičnu strukturu koja opisuje spinske stupnjeve slobode. Ako definiramo tzv. gamma matrice

$$\gamma^\mu \equiv (\beta; \beta\alpha) \quad (1.6)$$

dobiva se Diracova jednadžba u Lorentz kovarijantnom obliku (od sad nadalje uzimamo $\hbar=c=1$)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0 \quad (1.7)$$

gdje je $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Gamma matrice generiraju Cliffordovu algebru zadanu sa

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\ \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 &= \gamma_\mu^\dagger \end{aligned} \quad (1.8)$$

gdje je $g^{\mu\nu}$ tenzor Minkowskog. Prvi uvjet je nužan kako bi Diracova jednadžba bila konzistentna s disperzijskom relacijom (3.26), a druga osigurava hermitičnost Diracovog hamiltonijana, što se eksplicitno može napisati na sljedeći način

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0, \quad \gamma_i^\dagger = -\gamma_i \quad (1.9)$$

S obzirom da se radi o 4x4 matricama, implikacija je da Ψ također mora imati 4 komponente. Ono što na prvu pada na pamet jest običan 4-vektor, no, ispostavlja se da se Ψ ne transformira kao vektor pod Lorentzovom grupom. Ovakav objekt nazivamo spinor. Razlika leži u tome što je vektor objekt u prostoru Minkowskog, a spinori su objekti koji "žive" u spinskom prostoru. Rotacijom vektora za 2π dobiva se identičan vektor, a spinore moramo zarotirati za 4π da bi se vratili u početnu konfiguraciju. Dakle, spinor¹ je 4x1 matrica čiji su elementi funkcije energije i impulsa koji kada se pomnože s faktorom e^{ipx} (odnosno e^{-ipx}) daju rješenja Diracove jednadžbe² (1.7)

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T \quad (1.10)$$

¹Preciznije, ovaj objekt nazivamo bispinor jer se može dalje reducirati na dvokomponentne objekte koje onda zovemo spinori.

²Rješenja u slobodnoj teoriji će biti ravni valovi, pošto se radi o lineariziranoj teoriji.

Možemo napisati operator polja za Diracov fermion, pri čemu koristimo generička svojstvena stanja stacionarne jednadžbe $\Phi_E(x)$

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{E>0} a_E e^{-iEt} \Phi_E(x) + \sum_{E<0} b_{-E}^\dagger e^{-iEt} \Phi_E(x) \quad (1.11)$$

gdje su a_E^\dagger i b_E^\dagger operatori stvaranja čestice i antičestice s energijom E , koji zadovoljavaju kanonske fermionske antikomutacijske relacije. Stacionarna Diracova jednadžba ima važno svojstvo: za svako rješenje $\Phi(x)$ s energijom E , postoji rješenje $\Phi^C(x) = \mathcal{C}\Phi(x) \equiv \mathcal{C}\Phi^*(x)$ s energijom $-E$. Ovdje je \mathcal{C} matrica nabojne konjugacije (eksplicitan oblik trenutno nije važan). Promjenom predznaka za nijemu sumaciju i koristeći gornje svojstvo možemo napisati operator polja kao sumu po pozitivnim energijama

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{E>0} \left[a_E e^{-iEt} \Phi_E(x) + b_E^\dagger e^{iEt} \mathcal{C}\Phi_E^*(x) \right] \quad (1.12)$$

Lako se može pokazati da ovako definirani operatori polja zadovoljavaju sljedeće antikomutacijske relacije

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{\Psi}_a(t, \vec{x}), \hat{\Psi}_b^\dagger(t, \vec{x}') \right\} &= \delta_{ab} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ \left\{ \hat{\Psi}_a(t, \vec{x}), \hat{\Psi}_b(t, \vec{x}') \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

gdje indeksi $a, b = 1, 2, 3, 4$ označavaju spinorne komponente. Osim toga, vrijedi $\hat{\Psi}(x) \neq \hat{\Psi}^\dagger(x)$, što implicira da se čestice i antičestice razlikuju. Diracov hamiltonijan u drugoj kvantizaciji ima sljedeći oblik

$$\mathcal{H}_D = \sum_{E>0} E \left(a_E^\dagger a_E + b_E^\dagger b_E \right) \quad (1.14)$$

Kakva će biti rješenja slobodne Diracove jednadžbe ovisi o gamma matricama pa u tom slučaju možemo razlikovati Weylovu i Majorana reprezentaciju. To nisu jedine reprezentacije jer postoji velik broj izbora gamma matrica koje zadovoljavaju zadane antikomutacijske relacije. U kontekstu teorije grupa, Diracov spinor nije ireducibilna reprezentacija (IRREP) Lorentzove grupe, već se može reducirati na dvokomponentne objekte koji jesu IRREPs.

1.2 Lijevi ili desni ?

1.2.1 Weylova reprezentacija

Weylovu (ili kiralnu) reprezentaciju dobivamo izborom

$$\check{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\gamma}^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Weylovi fermioni su IRREPs prave Lorentzove grupe koje možemo koristiti kao građevne jedinice za bilo kakvo fermionsko polje [4]. Prema tome, Diracov spinor je kompozicija dvaju Weylovih spinora

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Ako spin čestice "gleda" u smjeru impulsa čestice, spinor nazivamo desni, tj. desnog heliciteta (engl. *right-handed*), a ako gleda suprotno zovemo ga lijevi (*left-handed*). Kiralnost je malo apstraktniji pojam, a određena je načinom na koji se čestica transformira pod Poincaréovom grupom, odnosno lijevom ili desnom reprezentacijom Poincaréove grupe³. Zašto nam je uopće važna kiralnost? Ispostavlja se da je svemir "briga" jesu li čestice lijeve ili desne kiralnosti, u smislu da samo lijeve čestice, a desne antičestice sudjeluju u slabim interakcijama. Za bezmasene čestice, kiralnost i helicitet su ekvivalentni s obzirom da se čestica giba brzinom svjetlosti. Baždarne teorije koje uključuju bezmasena fermionska polja imaju kiralnu simetriju, tj. rotacijom lijevih i desnih komponenti ne radimo razliku u fizikalnoj teoriji. U Weylovoj reprezentaciji Diracovu jednadžbu možemo napisati kao 2 jednadžbe

$$\begin{aligned} (i\partial_t - p \cdot \sigma) \psi_R - m_D \psi_L &= 0 \\ (i\partial_t + p \cdot \sigma) \psi_L - m_D \psi_R &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

gdje je m_D tzv. Diracova masa. Očito je kako maseni član miješa lijevi i desni Weylov spinor, no, ako postavimo $m \rightarrow 0$, jednadžbe se potpuno razvezuju. Ovo nas vodi na važan zaključak - ako je čestica Weylov spinor, ona nužno mora biti bezmasena! Tada kažemo da lijevi, odnosno desni kiralni fermion zadržava svoju kiralnost pod Lorentzovim transformacijama.

³Detalji se mogu naći u udžbenicima kvantne teorije polja.

1.2.2 Majorana reprezentacija

Pitanje koje se nameće u rješenjima Diracove jednadžbe jest možemo li dobiti realno rješenje? Ispostavlja se da specifičnim izborom gamma matrica možemo nametnuti uvjet realnosti polja

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}^* \quad (1.18)$$

U tom slučaju, sve gamma matrice moraju biti imaginarne ($\tilde{\gamma}_\mu^* = -\tilde{\gamma}_\mu$), što je prvi pokazao E. Majorana 1937. pa navedenu reprezentaciju zovemo Majorana reprezentacija [5].

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{\gamma}^1 &= \begin{pmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix} \\ \tilde{\gamma}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{\gamma}^3 &= \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Već smo spomenuli problem na koji nailazimo - Majorana reprezentacija nije jedinstvena. Postoje mnogi izbori Diracovih matrica koje zadovoljavaju (1.8). U kvantnoj teoriji polja postoji teorem koji kaže da ako postoje dva izbora gamma matrica koje zadovoljavaju navedene uvjete, oni će biti povezani unitarnom transformacijom

$$\gamma^\mu = U\tilde{\gamma}^\mu U^\dagger \quad (1.20)$$

Drugim riječima, ako je Ψ rješenje Diracove jednadžbe u Majorana reprezentaciji, rješenje u generičkoj reprezentaciji će biti zadano sa

$$\Psi = U\tilde{\Psi} \quad (1.21)$$

Kako se onda Majorana uvjet realnosti pojavljuje ako odaberemo bilo koju drugu reprezentaciju? Iz jednadžbi (1.18) i (1.21) dobiva se uvjet

$$U^\dagger \psi = \left(U^\dagger \psi \right)^* \quad (1.22)$$

odnosno

$$\psi = UU^\top \psi^* \quad (1.23)$$

S obzirom da je U unitarna matrica, UU^T je također unitarno pa je uobičajeno umjesto U koristiti drugu unitarnu matricu, C , zadanu sa

$$UU^T = \gamma_0 C \quad (1.24)$$

Notacija koju uvodimo je sljedeća

$$\hat{\Psi} \equiv \gamma_0 C \Psi^* \quad (1.25)$$

pa je Majorana fermionsko polje definirano uvjetom

$$\psi = \hat{\psi} \quad (1.26)$$

Diracova jednadžba ima nekoliko simetrija. Ona koja nam je važna za Majorana fermione jest $U(1)$ simetrija definirana s $\Psi(x) \rightarrow e^{i\theta}\Psi(x)$, koja osigurava vezanje na EM polje. Ovo se postiže minimalnim vezanjem, $p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu$, gdje je A_μ EM baždarni potencijal. U slučaju Majorana čestica, ako želimo da su rješenja jednadžbe isključivo realna, jedini način da nabojnom konjugacijom dobijemo isto rješenje jest da su Majorana fermioni električki neutralni, odnosno

$$\Psi^C(x) = \Psi(x) \quad (1.27)$$

Za $E \neq 0$, stacionarna stanja $\Phi(x)$ i $\Phi^C(x)$ pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima energije, stoga su nužno ortogonalna. Nasuprot tome, za $E = 0$, Majorana uvjet zadan sa (1.27) mogu zadovoljiti i stacionarna stanja $\Phi(x)$ i tada ih zovemo Majorana nul modovi [6], a upravo njima ćemo se baviti u sljedećem poglavlju.

Prelaskom u Majorana bazu, matrica nabojne konjugacije C postaje jedinična matrica, a Diracova jednadžba se razvezuje i postaje Majorana jednadžba

$$\begin{aligned} (i\partial_t - p \cdot \sigma) \psi_R - im_R \sigma^2 \psi_R^* &= 0 \\ (i\partial_t + p \cdot \sigma) \psi_L - im_L \sigma^2 \psi_L^* &= 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ono što je drugačije u odnosu na Weylovu jednadžbu jest da maseni član ne miješa lijeve i desne spinore, što znači da je Majorana čestica masena čestica i dvije mase ne moraju biti jednake. U slučaju kada jesu jednake, dobivamo Diracov spinor. Za razliku od Diracove, Majorana jednadžba nije invarijantna na baždarne transformacije, što znači da se ne vezuje na EM polje, odnosno, Majorane ne mogu nositi naboj.

U 4-komponentnoj formi, Majorana polje možemo napisati na sljedeći način

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} -i\sigma^2\psi_L^* \\ \psi_L \end{pmatrix}, \Psi_R = \begin{pmatrix} \psi_R \\ i\sigma^2\psi_R^* \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Odavdje možemo uočiti da je par Majorana polja u kojima je $m_L = m_R$ te $\psi_L = i\sigma^2\psi_R$, ekvivalentan Diracovu polju. Kvantizacija Majorana polja slijedi direktno iz kvantizacije Diracovog polja (1.12) zahtijevajući $a_E = b_E$

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{E>0} \left[a_E e^{-iEt} \Phi_E(x) + a_E^\dagger e^{iEt} C \Phi_E^*(x) \right] \quad (1.30)$$

Iz ovoga slijedi

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_a^\dagger(x) &= \hat{\Psi}_a(x) \\ \left\{ \hat{\Psi}_a(x), \Psi_b(x') \right\} &= \delta_{ab} \delta(x - x') \end{aligned} \quad (1.31)$$

Prva jednačba govori da se na nivou operatora Majorana čestica ne razlikuje od svoje antičestice, a drugi uvjet definira antikomutacijsku algebru. Hamiltonijan Majorana polja je

$$\mathcal{H}_M = \sum_{E>0} E a_E^\dagger a_E \quad (1.32)$$

Ako usporedimo s Diracovim hamiltonijanom (1.14), Majorana hamiltonijan ima dvostruko manje stupnjeva slobode.

Na kraju ovog poglavlja, odgovorit ćemo na pitanje iz naslova ovog pododjeljka - lijevi ili desni? U različitim literaturama, *Majorana neutrino* naziva se ponekad lijevim, a ponekad desnim. Što je točno? Oboje i nijedno. Za masene čestice, helicitet može promijeniti vrijednost, tj. desni može prijeći u lijevi ako se prebacimo u sustav koji se giba brže od čestice čiji helicitet promatramo. Drugim riječima, helicitet nije Lorentz-invarijantan u slučaju masene čestice (invarijantan je na rotacije, ali ne i na *boost*-ove). Kiralnost, s druge strane, jest Lorentz invarijantna, ali nije očuvana. Odgovor na pitanje nema smisla jer samo pitanje nema smisla. Ako su neutrini zaista Majorana fermioni, koliko god da su njihove mase male, niti jedno od ovih svojstava nije prikladno za njihov opis - masivni fermioni ne posjeduju kiralnu simetriju u Lagrangianu, preciznije, maseni član razbija simetriju.

2 Mikroskopski opis supravodljivosti

Supravodljivost je eksperimentalno otkrivena 1911. od strane nizozemskog fizičara Heikea Kamerlingh-Onnesa, pionira fizike na niskim temperaturama. Proučavajući svojstva žive, otkrio je da pri temperaturi od oko $4.2K$ otpornost žive pada na nulu. Prošlo je skoro 40 godina do prve uspješne teorije supravodljivosti [7], koja je razvijena koristeći principe kvantne mehanike i pukom fizikalnom intuicijom autora. Unatoč savršenom slaganju s ekperimentalnim opažanjima, fenomenološka makroskopska Ginzburg-Landau teorija nije mogla objasniti temelje supravodljivosti. Prvu konzistentnu mikroskopsku teoriju, objavljenu 1957. [8, 9], napisali su Bardeen, Cooper i Schrieffer (tzv. BCS teorija), koja im je 1972. donijela Nobelovu nagradu. S obzirom da je cilj ovog rada pokazati na koji se način Majorana fermioni⁴ pojavljuju u teoriji supravodljivosti, nužno je razumjeti temeljnu teoriju. U nastavku konstruiramo BCS teoriju u formalizmu druge kvantizacije, tretirajući supravodljivo stanje kao osnovno stanje interagirajućeg elektronskog plina. U ovom neobičnom kvantnom stanju, elektroni formiraju vezana stanja (tzv. Cooperove parove [11]) koja dramatično mijenjaju makroskopska svojstva sustava - vode na pojavu savršene supravodljivosti i dijamagnetizma⁵.

2.1 Cooperovi parovi

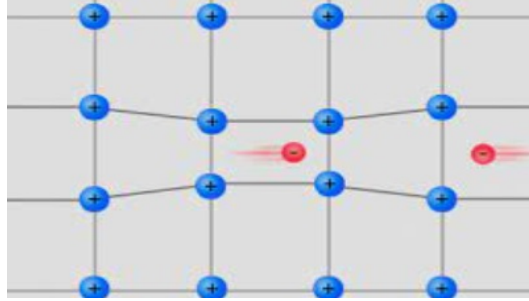
Kao što je već spomenuto, nosivi stup BCS teorije jest formacija Cooperovih parova - tendencija da se svi Cooperovi parovi *kondenziraju* u isto osnovno stanje zaslužna je za svojstva supravodljivosti. U konvencionalnim supravodičima formiranje parova dolazi od privlačne elektron-elektron interakcije čiji je medijator fonon. Fonon predstavlja kvant distorzije kristalne rešetke. Iako se radi o kvantnom efektu, simplificirana klasična slika pruža dostatan opis za potrebe ovog rada. Cooper je u svom originalnom radu [11] razmatrao formaciju jednog izoliranog Cooperovog para, no potrebno je razmotriti i realističnije stanje sustava razmatranjem mnoštva parova, kao što je to u potpunoj BCS teoriji.

Kako se elektroni u metalima vodičima ponašaju kao slobodne čestice, slikovito rečeno, prilikom njihova prolaska u blizini iona kristalne rešetke dolazi do distorzije pri čemu se pozitivni ioni primaknu elektronu i time povećavaju gustoću pozitivnog naboja u toj

⁴Točnije bi bilo reći *Majorana modovi* jer se radi o emergentnim kvazičesticama, o čemu će više biti riječ kasnije u radu.

⁵Za detaljni opis vidi Meissnerov efekt. [10].

točki prostora (slika 2.1). Kako se sad stvorio višak pozitivnog naboja, to privlači drugi, prostorno bliski elektron, pri čemu dva elektrona - onaj koji je stvorio višak naboja i onaj kojeg je taj višak privukao - postaju vezano stanje, odnosno Cooperov par.



Slika 2.1: Formiranje Cooperovog para

Ovo pomalo heurističko objašnjenje nije potpuno ispravno, prvenstveno iz razloga što implicira lokalnu interakciju. Kvantno-mehanički, privlačna interakcija putem fonona je dalekog doseg, štoviše, par može biti u vezanom stanju na udaljenostima od nekoliko stotina nanometara. Cooper je pokazao da zbog Fermi-Diracove statistike elektrona vezano stanje ima nižu energiju od Fermijeve energije konkretnog materijala. Energija vezanja je reda veličine $10^{-3}eV$ pa termalna energija lako razbija parove, zbog čega supravodljivost nastupa na niskim temperaturama. Ova se činjenica lako vidi promatrajući Schrödingеровu jednadžbu za dva elektrona u privlačnom potencijalu $V(\vec{r})$, pri čemu (uglavnom) pratimo [12]:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{r}_1}^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{r}_2}^2}{2m} + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (2.1)$$

Uz uobičajenu promjenu varijabli $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, Schrödingерова jednadžba postaje

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{R}}^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{r}}^2}{2\mu} + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = E\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \quad (2.2)$$

gdje je $m^* = 2m$ ukupna, a $\mu = m/2$ reducirana masa. Kako je potencijal neovisan o poziciji centra mase \mathbf{R} , rješenja će biti oblika:

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \psi(\mathbf{r})e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} \quad (2.3)$$

pa (1.2) postaje

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{r}}^2}{2\mu} + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = \tilde{E} \psi(\mathbf{r}) \quad (2.4)$$

gdje je \mathbf{K} impuls u centru mase, a $\tilde{E} = E - \frac{\hbar^2 K^2}{2m^*}$ svojstvena vrijednost energije koja poprima minimum onda kada impuls u centru mase iščezava $\mathbf{K} = 0 \rightarrow \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$. Ovisno o simetriji prostornog dijela valne funkcije, elektroni će formirati singlet ili triplet. Fourierovim transformatom valne funkcije, odnosno Schrödingerove jednačbe, dobivamo:

$$\psi(\mathbf{k}) = \int d^3r \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \psi(\mathbf{k}) + \int d^3r V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = E \psi(\mathbf{k})$$

Zamjenom varijabli $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ dobivamo

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{q}) \int d^3r \psi(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}} = \left(E - \frac{\hbar^2 k^2}{m} \right) \psi(\mathbf{k}),$$

$$\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \psi(\mathbf{k}') = (E - 2\varepsilon_{\mathbf{k}}) \psi(\mathbf{k})$$

gdje je $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ slobodna energija elektrona. Energija vezanog stanja manja je od ukupne slobodne energije dvaju elektrona $E < 2\varepsilon_{\mathbf{k}}$. Ako definiramo novu valnu funkciju, Schrödingerova jednačba postaje

$$\Delta(\mathbf{k}) = (E - 2\varepsilon_{\mathbf{k}}) \psi(\mathbf{k}) \quad (2.5)$$

pa je

$$\Delta(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \psi(\mathbf{k}')$$

Ako fiksiramo privlačni potencijal na sljedeći način

$$V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \begin{cases} -V_0, & \text{za } \varepsilon_{\mathbf{k}}, \varepsilon_{\mathbf{k}'} < \hbar\omega_D \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (2.6)$$

gdje je ω_D Debyeova frekvencija⁶, tada rješenje

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta$$

⁶ *Cut-off* na Debyeovoj frekvenciji događa se onda kada valna duljina fonona dosegne vrijednost duljine ćelije u rešetci.

implicira da je valna funkcija parna pa spinovi moraju biti antiparalelni (singlet). Ono što je zasigurno zapanjujuće svojstvo Cooperovih parova jest simetričnost valne funkcije što dovodi do mogućnosti da se više parova može nalaziti u istom kvantnom stanju, u kontrastu sa slobodnim elektronima. Supravodljivost je posljedica upravo ovog svojstva.

2.2 BCS teorija supravodljivosti

Sada možemo rekonstruirati teoriju mnoštva Cooperovih parova. U stvarnim sustavima mnoštva čestica, privlačni potencijal osjećaju samo oni elektroni koji su blizu Fermijevoj površini. Proizvoljno mali privlačni potencijal vodi na nestabilnost normalnog stanja, tj. Fermijevog mora. Nestabilnost dolazi od raspršenja u jednočestičnim stanima $|\mathbf{k}, \uparrow\rangle$ i $|\mathbf{-k}, \downarrow\rangle$ koji su međusobno povezani T simetrijom. BCS osnovno stanje na $T = 0K$ se sastoji od dvije klase elektrona: onih duboko u Fermijevom moru i onih blizu Fermijeve površine koji čine "zaleđenu koru" na površini Fermijeva mora [?].

Krećemo od efektivnog hamiltonijana koji će biti izgrađen od bilineranih članova za kinetički član i kvartičkih članova u interakciji:

$$H = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \quad (2.7)$$

gdje $c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ stvara elektron impulsa \mathbf{k} i spina σ . Operatori c i c^\dagger zadovoljavaju fermionske antikomutacijske relacije

$$\{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = \{c_i, c_j\} = 0, \quad \{c_i^\dagger, c_j\} = \delta_{ij} \quad (2.8)$$

Kemijski potencijal je uključen u jednadžbu definicijom $\xi_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} - \mu$. Drugi član predstavlja stvaranje i poništenje parova sa suprotnim impulsima i spinovima. Ključan korak je dekompozicija kvartičkog člana koristeći aproksimaciju srednjeg polja (engl. *mean-field approximation*), koju koristimo u slučajevima kada sustav ima veliki broj stupnjeva slobode. Tada ponašanje stohastičkog modela možemo aproksimirati usrednjavanjem po stupnjevima slobode, a u slučaju teorije polja, aproksimacija nam dopušta da hamiltonijan napišemo u terminima fluktuacija oko srednje vrijednosti polja.

$$AB \cong \langle A \rangle B + A \langle B \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \quad (2.9)$$

Pokazuje se da je optimalan izbor $A = c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger$, $B = c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\downarrow}$ čime dobivamo *mean-field* BCS hamiltonijan

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \left(\langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \rangle c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} + c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \langle c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle - \langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \rangle \langle c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle \right)$$

Definiramo funkciju energijskog procijepa (engl. *gap function*)

$$\Delta_{\mathbf{k}} := -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle \quad (2.10)$$

$$\Delta_{\mathbf{k}}^* := -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle c_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \rangle$$

Tek će kasnije postati jasno zašto Δ nazivamo funkcijom procijepa.

Nakon dekompozicije kvartičkog člana, BCS hamiltonijan postaje

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} - \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k},\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} - \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger + \text{konst.} \quad (2.11)$$

Konstanta nam trenutno nije bitna stoga ćemo je u nastavku ispustiti iz računa. H_{BCS} sadrži članove oblika cc i $c^\dagger c^\dagger$, koji ne čuvaju broj čestica (tj. od njih ne možemo konstruirati operator broja čestica). pa očekujemo da svojstvena stanja nemaju dobro definiran broj čestica. Idući korak je dijagonalizacija hamiltonijana koristeći tzv. *Bogolyubovu (Bogolyubov-Valatin) transformaciju* tako da uvodimo nove fermionske operatore koji su linearna kombinacija operatora stvaranja i spuštanja

$$\begin{pmatrix} \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}}^* & -v_{\mathbf{k}} \\ v_{\mathbf{k}}^* & u_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\uparrow} \\ c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Bogolyubova transformacija je izomorfizam algebre kanonskih komutacijskih (ili antikomutacijskih) relacija što pruža ekvivalenciju reprezentacija [13], odnosno novi operatori zadovoljavaju iste komutacijske relacije

$$\begin{aligned}
 \left\{ \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}, \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \right\} &= \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger + \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} \\
 &= u_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger - u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^* c_{\mathbf{k}\uparrow} c_{-\mathbf{k},\downarrow} - v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger + v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k},\downarrow} \\
 &\quad + u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^* c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\uparrow} - u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger - v_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k},\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} + v_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k},\downarrow} c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \\
 &= |u_{\mathbf{k}}|^2 \underbrace{\left\{ c_{\mathbf{k}\uparrow}, c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \right\}}_{=1} - u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^* \underbrace{\left\{ c_{\mathbf{k}\uparrow}, c_{-\mathbf{k},\downarrow} \right\}}_{=0} - v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} \underbrace{\left\{ c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger, c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \right\}}_{=0} + |v_{\mathbf{k}}|^2 \underbrace{\left\{ c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger, c_{-\mathbf{k},\downarrow} \right\}}_{=1} \\
 &= |u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 \stackrel{!}{=} 1
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Invertiranjem dobivamo

$$\begin{aligned}
 c_{\mathbf{k}\uparrow} &= u_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} + v_{\mathbf{k}} \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \\
 c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger &= u_{\mathbf{k}} \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger - v_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

i vraćamo u BCS hamiltonijan

$$\begin{aligned}
 H_{\text{BCS}} &= \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \xi_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger + v_{\mathbf{k}}^* \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow} \right) \left(u_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} + v_{\mathbf{k}} \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \right) + \xi_{\mathbf{k}} \left(-v_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} + u_{\mathbf{k}}^* \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \right) \left(-v_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger + u_{\mathbf{k}} \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \Delta_{\mathbf{k}}^* \left(-v_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger + u_{\mathbf{k}} \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow} \right) \left(u_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} + v_{\mathbf{k}} \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \right) - \Delta_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger + v_{\mathbf{k}}^* \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow} \right) \left(-v_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} + u_{\mathbf{k}}^* \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \right) \right\} \\
 H_{\text{BCS}} &= \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \left(\xi_{\mathbf{k}} |u_{\mathbf{k}}|^2 - \xi_{\mathbf{k}} |v_{\mathbf{k}}|^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + \Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^* \right) \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} \right. \\
 &\quad + \left(-\xi_{\mathbf{k}} |v_{\mathbf{k}}|^2 + \xi_{\mathbf{k}} |u_{\mathbf{k}}|^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} + \Delta_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^* \right) \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow} \\
 &\quad + \underbrace{\left(\xi_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} + \Delta_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^2 - \Delta_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^*)^2 \right)}_{=2\xi_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}} \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \\
 &\quad \left. + \underbrace{\left(\xi_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}} - \Delta_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}} (v_{\mathbf{k}}^*)^2 \right)}_{=-2\xi_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}} \gamma_{-\mathbf{k},\downarrow} \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} \right\} + \text{konst.}
 \end{aligned}$$

gdje smo za dobiti drugu jednakost koristili antikomutacijske relacije.

Da bismo dijagonalizirali hamiltonijan potrebno je izabrati koeficijente takve da se riješimo neželjenih članova $\gamma\gamma$ i $\gamma^\dagger\gamma^\dagger$:

$$2\xi_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} + \Delta_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^2 - \Delta_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^*)^2 = 0 \tag{2.15}$$

Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe dobivamo

$$\frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}^*} = \pm \frac{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2} - \xi_{\mathbf{k}}}{\Delta_{\mathbf{k}}^*} \quad (2.16)$$

Zbog kombinacije koeficijenata uz $\gamma\gamma$ i $\gamma^\dagger\gamma^\dagger$ dopušteno je uvesti faze:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{k}} &= |\Delta_{\mathbf{k}}| e^{i\phi_{\mathbf{k}}} \\ u_{\mathbf{k}} &= |u_{\mathbf{k}}| e^{i\alpha_{\mathbf{k}}} \\ v_{\mathbf{k}} &= |v_{\mathbf{k}}| e^{i\beta_{\mathbf{k}}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Uvrštavajući u 2.15 dobivamo

$$2\xi_{\mathbf{k}} |u_{\mathbf{k}}| |v_{\mathbf{k}}| e^{i(\beta_{\mathbf{k}} - \alpha_{\mathbf{k}})} + |\Delta_{\mathbf{k}}| \left(|v_{\mathbf{k}}|^2 e^{i(2\beta_{\mathbf{k}} - \phi_{\mathbf{k}})} - |u_{\mathbf{k}}|^2 e^{i(\phi_{\mathbf{k}} - 2\alpha_{\mathbf{k}})} \right) = 0$$

Ne gubimo na općenitosti ako fazu jednog od koeficijenata namjestimo na nulu, čime dobivamo da faza drugog koeficijenta i funkcije procijepa mora biti jednaka:

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{k}} &= 0 \\ \beta_{\mathbf{k}} &= \phi_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

(2.16) sada postaje

$$\frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} = \pm \frac{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2} - \xi_{\mathbf{k}}}{\Delta_{\mathbf{k}}^*}$$

Zadržat ćemo se na pozitivnom rješenju kako bi osigurali da energija BCS stanja ima minimum, a ne maksimum. Koristeći normalizacijski uvjet (2.13) konačno dolazimo do

$$\begin{aligned} |u_{\mathbf{k}}|^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2}} \right) \\ |v_{\mathbf{k}}|^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2}} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dobivene koeficijente uvrštavamo u naš H_{BCS} (ignorirajući konstantan član koji dolazi od antikomutacijskih relacija) i dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned}
 H'_{BCS} &= \sum_{\mathbf{k}} \left[\xi_{\mathbf{k}} \left(|u_{\mathbf{k}}|^2 - |v_{\mathbf{k}}|^2 \right) + \Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* + \Delta_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} \right] \left(\gamma_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} + \gamma_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \gamma_{-\mathbf{k}\downarrow} \right) \\
 &= \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2} \left(\gamma_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} + \gamma_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \gamma_{-\mathbf{k}\downarrow} \right)
 \end{aligned}$$

Uz pretpostavku T simetrije, $|\Delta_{-\mathbf{k}}| = |\Delta_{\mathbf{k}}|$, $\xi_{-\mathbf{k}} = \xi_{\mathbf{k}}$, efektivni hamiltonijan glasi

$$H_{BCS} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} E_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}\sigma} + E_0 \quad (2.20)$$

gdje je E_0 energija osnovnog stanja, a $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2}$. Ovdje bi se bilo dobro zaustaviti i prisjetiti se hamiltonijana Majorana polja (1.32) što već sugerira moguću povezanost. O ovome ćemo nešto kasnije raspravljati.

Sada postaje jasnije zašto se $\Delta_{\mathbf{k}}$ naziva funkcijom procijepa (engl. *gap function*) - čak i na Fermijevom nivou, $\xi_{\mathbf{k}} = 0$, spektar supravodiča ima energijski procijep veličine $|\Delta_{\mathbf{k}}|$. Moramo uložiti minimalno $2|\Delta_{\mathbf{k}}|$ energije da pobudimo kvazičestice opisane operatorima

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} &= u_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow} - v_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \\
 \gamma_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger &= u_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger + v_{\mathbf{k}}^* c_{\mathbf{k}\uparrow}
 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Treba spomenuti kako se funkcija procijepa u teoriji supravodljivosti često naziva parametrom reda (engl. *order parameter*). Parametar uređenja razlikuje različite faze (uređenja) sustava. Očito je kako se u BCS teoriji interpretira kao energija vezanja Cooperovog para, odnosno minimalna energija pobuđenja sustava. O različitim fazama u supravodičima će biti riječ kasnije.

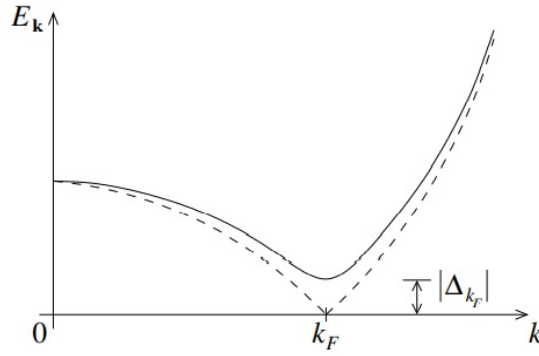
2.2.1 BCS osnovno stanje

Prije nego promotrimo BCS osnovno stanje, promotrit ćemo tzv. normalno stanje za koje $\Delta_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$

$$|u_{\mathbf{k}}|^2 = \begin{cases} 0 & \text{za } \xi_{\mathbf{k}} < 0 \\ 1 & \text{za } \xi_{\mathbf{k}} > 0 \end{cases}, \quad |v_{\mathbf{k}}|^2 = \begin{cases} 1 & \text{za } \xi_{\mathbf{k}} < 0 \\ 0 & \text{za } \xi_{\mathbf{k}} > 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Zaključujemo da u normalnom stanju pobuđenje Bogolyubove kvazičestice odgovara stvaranju elektrona za energije iznad Fermijevog nivoa, odnosno stvaranju šupljine suprotnog impulsa i spina za energije ispod Fermijeve. U supravodljivom stanju Bogolyubova kvazičestica postaje superpozicija elektrona i šupljine.

Sljedeća slika prikazuje kako supravodljivost mijenja energetske spektar otvaranjem cijepa



Slika 2.2: Energetski spektar normalnog (crtkano) i supravodljivog stanja

BCS valna funkcija osnovnog stanja odgovara vakuumu Bogolyubovih kvazičestica:

$$\gamma_{\mathbf{k}\sigma} |\Psi_{\text{BCS}}\rangle = 0 \quad (2.23)$$

U terminima originalnog vakuuma elektrona, uzimajući samo jednu spinsku komponentu (što se pokazuje dovoljno jer uvjet za drugu komponentu daje isti rezultat),

$$u_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow} |\Psi_{\text{BCS}}\rangle = v_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger |\Psi_{\text{BCS}}\rangle \quad (2.24)$$

Valna funkcija će biti proizvoljna kombinacija Cooperovih parova

$$|\Psi_{\text{BCS}}\rangle = \mathcal{N} \prod_{\mathbf{q}} e^{\rho_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger} |0\rangle \quad (2.25)$$

gdje je \mathcal{N} normalizacijska konstanta, a ρ funkcija koju tek treba odrediti.

Promatramo što se događa kada $c_{\mathbf{k}\uparrow}$ djeluje na ovo stanje. Jedini član u produktu koji ne (anti)komutira s operatorom jest onaj za koji je $\mathbf{q} = \mathbf{k}$. Upravo ćemo taj član i promotriti

$$c_{\mathbf{k}\uparrow} e^{\rho_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger} |0\rangle = c_{\mathbf{k}\uparrow} e^{\theta_{\mathbf{k}}} |0\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{\mathbf{k}\uparrow} \theta_{\mathbf{k}}^n}{n!} |0\rangle \quad (2.26)$$

pri čemu smo uveli pokratu $\theta_{\mathbf{k}} = \rho_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger$. Komutacijska relacija glasi

$$\begin{aligned} [c_{\mathbf{k}\uparrow}, \theta_{\mathbf{k}}] &= \rho_{\mathbf{k}} \left(c_{\mathbf{k}\uparrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger - c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\uparrow} \right) \\ &= \rho_{\mathbf{k}} \left\{ c_{\mathbf{k}\uparrow}, c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \right\} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \\ &= \rho_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{aligned} \quad (2.27)$$

Slijedi

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}\uparrow} \theta_{\mathbf{k}} |0\rangle &= \rho_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger |0\rangle \\ c_{\mathbf{k}\uparrow} \theta_{\mathbf{k}}^2 |0\rangle &= \left([c_{\mathbf{k}\uparrow} \theta_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}}] + \theta_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow} \theta_{\mathbf{k}} \right) |0\rangle \\ &= \theta_{\mathbf{k}} \left([c_{\mathbf{k}\uparrow} \theta_{\mathbf{k}}] + c_{\mathbf{k}\uparrow} \theta_{\mathbf{k}} \right) |0\rangle \\ &= 2\theta_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger |0\rangle \end{aligned}$$

Općenito

$$c_{\mathbf{k}\uparrow} \theta_{\mathbf{k}}^n |0\rangle = n \theta_{\mathbf{k}}^{n-1} \rho_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger |0\rangle \quad (2.28)$$

$$c_{\mathbf{k}\uparrow} e^{\rho_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger} |0\rangle = \rho_{\mathbf{k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{n-1}}{(n-1)!} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger |0\rangle \quad (2.29)$$

Kako vrijedi

$$\left[\theta_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right] = \rho_{\mathbf{k}} \left[c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right] = 0$$

Dolazimo do rezultata

$$c_{\mathbf{k}\uparrow} \left(e^{\rho_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger} |0\rangle \right) = \rho_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\theta_{\mathbf{k}}^{n'}}{(n')!} |0\rangle = \rho_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \left(e^{\rho_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger} |0\rangle \right) \quad (2.30)$$

Uvrštavajući ovo u (2.24) dobivamo

$$u_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow} |\Psi_{\text{BCS}}\rangle = u_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger |\Psi_{\text{BCS}}\rangle = v_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger |\Psi_{\text{BCS}}\rangle \quad (2.31)$$

što implicira

$$\rho_{\mathbf{k}} = \frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} \quad (2.32)$$

Sada možemo napisati valnu funkciju BCS osnovnog stanja

$$|\Psi_{\text{BCS}}\rangle = \mathcal{N} \prod_{\mathbf{k}} e^{\frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger}} |0\rangle \quad (2.33)$$

Prilikom razvoja u red, zbog Paulijevega principa imamo $(c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger})^n = 0$, za $n > 1$ pa je konačno

$$|\Psi_{\text{BCS}}\rangle = \mathcal{N} \prod_{\mathbf{k}} \left(1 + \frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \right) |0\rangle \quad (2.34)$$

Za normalizacijski faktor $\mathcal{N} = \prod_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}$ normalizacija valne funkcije glasi

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \Psi_{\text{BCS}} | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\ &= \left\langle 0 \left| \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^* + v_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}) \prod_{\mathbf{k}'} (u_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^{\dagger}) \right| 0 \right\rangle \end{aligned} \quad (2.35)$$

Zbog fermionskih antikomutacijskih relacija preživljavaju samo oni članovi za koje je $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$

$$1 = \left\langle 0 \left| \prod_{\mathbf{k}} \left(|u_{\mathbf{k}}|^2 + u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} + u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} + |v_{\mathbf{k}}|^2 c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \right) \right| 0 \right\rangle$$

Drugi i treći član isčezavaju jer stvaraju/ponišavaju par, a posljednji član čuva broj parova pa slijedi

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\text{BCS}} | \Psi_{\text{BCS}} \rangle &= \prod_{\mathbf{k}} \left(|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 \right) = 1 \\ |u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Dakle, možemo zaključiti da je osnovno stanje oblika

$$|\Psi_{\text{BCS}}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \right) |0\rangle \quad (2.37)$$

2.2.2 Funkcija energijskog procijepa

Već smo u prošlom dijelu utvrdili da supravodljivo stanje otvara energijski procijep. Sada bi bilo zgodno vidjeti kako je temperatura povezana s otvaranjem procijepa. Prvo, ono što primjećujemo u jednadžbi (2.10) jest da je funkcija procijepa proporcionalna očekivanoj vrijednosti produkta operatora stvaranja, odnosno poništenja. Članovi koji sadrže različit broj operatora stvaranja i poništenja imat će neisčezavajuću očekivanu vrijednost. Na primjer,

$$\begin{aligned} \left\langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right\rangle_{\text{BCS}} &\equiv \langle \Psi_{\text{BCS}} | c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\ &= \langle 0 | \prod_{\mathbf{k}'} (u_{\mathbf{k}'}^* + v_{\mathbf{k}'\downarrow}^* c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}) c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \prod_{\mathbf{k}''} (u_{\mathbf{k}''} + v_{\mathbf{k}''\uparrow} c_{\mathbf{k}''\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}''\downarrow}^\dagger) | 0 \rangle \end{aligned}$$

Prvo razdvajamo slučaj kada je $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$. Kako vrijedi $\langle 0 | c_j^\dagger = 0$ te $c_j | 0 \rangle = 0$, koristeći pravila normalnog uređenja (*Wickovo uređenje*) za produkt fermionskih operatora čime dobivamo

$$\left\langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right\rangle_{\text{BCS}} = \langle 0 | v_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \prod_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}'}^* + v_{\mathbf{k}'\downarrow}^* c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}) \prod_{\mathbf{k}''} (u_{\mathbf{k}''} + v_{\mathbf{k}''\uparrow} c_{\mathbf{k}''\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}''\downarrow}^\dagger) | 0 \rangle$$

Primjenjujemo antikomutacijske relacije na član ispred produkta

$$\left\langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right\rangle_{\text{BCS}} = \langle 0 | v_{\mathbf{k}}^* \prod_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}'}^* + v_{\mathbf{k}'\downarrow}^* c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}) \prod_{\mathbf{k}''} (u_{\mathbf{k}''} + v_{\mathbf{k}''\uparrow} c_{\mathbf{k}''\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}''\downarrow}^\dagger) | 0 \rangle$$

Rastavljanjem produkta za $\mathbf{k} = \mathbf{k}''$ dobivamo

$$\left\langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right\rangle_{\text{BCS}} = \langle 0 | v_{\mathbf{k}}^* (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger) \prod_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}'}^* + v_{\mathbf{k}'\downarrow}^* c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}) \prod_{\mathbf{k}'' \neq \mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}''} + v_{\mathbf{k}''\uparrow} c_{\mathbf{k}''\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}''\downarrow}^\dagger) | 0 \rangle$$

U produktu će preživjeti samo oni za koje je $\mathbf{k}' = \mathbf{k}''$

$$\left\langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right\rangle_{\text{BCS}} = \langle 0 | v_{\mathbf{k}}^* (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger) \prod_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}'}^* + v_{\mathbf{k}'\downarrow}^* c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}) (u_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger) | 0 \rangle$$

Konačno dolazimo do

$$\begin{aligned} \langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \rangle_{\text{BCS}} &= \langle 0 | v_{\mathbf{k}}^* \left(u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right) \prod_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} \underbrace{\left(|u_{\mathbf{k}'}|^2 + |v_{\mathbf{k}'}|^2 \right)}_{=1} | 0 \rangle \\ \langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \rangle_{\text{BCS}} &= v_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Još uvijek nismo konzistentno odredili jednadžbu funkcije procijepa. Da bismo to uradili, uvrštavamo Bogolyubovu transformaciju (2.21) u (2.10):

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{k}} &= -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \left\langle \left(u_{\mathbf{k}'}^* \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow} - v_{\mathbf{k}'} \gamma_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \right) \left(u_{\mathbf{k}'}^* \gamma_{\mathbf{k}'\uparrow} + v_{\mathbf{k}'} \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \right) \right\rangle \\ \Delta_{\mathbf{k}} &= -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'}^* v_{\mathbf{k}'} \left(\langle \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow} \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \rangle - \langle \gamma_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

pri čemu smo koristili činjenicu da je očekivana vrijednost $\gamma\gamma$ i $\gamma^\dagger\gamma^\dagger$ jednaka nuli.

Bogolyubove kvazičestice imaju energiju $E_{\mathbf{k}}$ i slijede Fermi-Diracovu statistiku pa možemo pisati

$$\langle \gamma_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle = \langle \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow} \rangle = \frac{1}{e^{\beta E_{\mathbf{k}'}} + 1} \quad (2.40)$$

iz čega proizlazi

$$\underbrace{\langle \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow} \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \rangle}_{1 - \langle \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow} \rangle} - \langle \gamma_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle = 1 - \frac{2}{e^{\beta E_{\mathbf{k}'}} + 1} = \frac{e^{\beta E_{\mathbf{k}'}} - 1}{e^{\beta E_{\mathbf{k}'}} + 1} = \tanh \left(\frac{E_{\mathbf{k}'}}{2k_B T} \right) \quad (2.41)$$

Također, možemo odrediti umnožak koeficijenata $u_{\mathbf{k}'}^* v_{\mathbf{k}'}$ u izrazu (2.39)

$$u_{\mathbf{k}'}^* v_{\mathbf{k}'} = |u_{\mathbf{k}}|^2 \frac{v_{\mathbf{k}'}}{u_{\mathbf{k}'}} = \frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{2\sqrt{\xi_{\mathbf{k}'}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}'}|^2}} \quad (2.42)$$

Konačno dolazimo do jednadžbe procijepa na proizvoljnoj temperaturi

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \Delta_{\mathbf{k}'}}{2E_{\mathbf{k}'}} \tanh \left(\frac{E_{\mathbf{k}'}}{2k_B T} \right) \quad (2.43)$$

Ako fiksiramo potencijal (što automatski fiksira Δ), kao što smo to napravili u (2.6), slijedi⁷

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{V_0\rho F}} \quad (2.44)$$

⁷Za izračun vidi [14], str. 90-91.

gdje je ρ_F gustoća fermionskih stanja na Fermijevoj nivou. Odavde ponovno vidimo kako proizvoljno mala pozitivna interakcija doprinosi otvaranju energijskog procijepa na apsolutnoj nuli što ukazuje na nestabilnost Fermijeveg mora prema formiranju BCS supravodljivog stanja.

3 Majorana fermioni u fizici kondezirane tvari

U ovom dijelu rada, koristeći matrični formalizam, ćemo pokazati kako nas Bogolyubove kvazičestice vode na Majorana fermione. Prije svega, potrebno se vratiti na definiciju Bogolyubove transformacije (2.12). U supravodljivom stanju ($0 < |u_{\mathbf{k}}|^2 < 1$ i $0 < |v_{\mathbf{k}}|^2 < 1$), elektron "postaje" šupljina formiranjem Cooperovog para, što dovodi do toga da se fermionska pobuđenja u supravodljivom stanju mogu prirodno napisati kao superpozicija elektrona i šupljine. Ako pogledamo (2.19) u supravodljivom stanju i postavimo se na Fermijevu plohu ($\xi_{\mathbf{k}} = 0$) te odaberemo samo jednu komponentu spina, npr. \uparrow

$$\gamma_{\mathbf{k}\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{2}}c_{\mathbf{k}\uparrow} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi_{\mathbf{k}}}c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \quad (3.1)$$

primjećujemo da elektron i šupljina doprinose kvazičestici jednakim amplitudama, što znači da kvazičestica mora biti električki neutralna.

Sljedeći korak prema Majoranama je zapisati generički BCS hamiltonijan (2.11) u prostoru položaja

$$\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{r} \left[\sum_{\sigma,\sigma'} H_0^{\sigma,\sigma'}(\mathbf{r})c_{\sigma\mathbf{r}}^\dagger c_{\sigma'\mathbf{r}} + \left(\Delta(\mathbf{r})c_{\uparrow\mathbf{r}}^\dagger c_{\downarrow\mathbf{r}}^\dagger + h.c. \right) + konst. \right] \quad (3.2)$$

gdje $c_{\sigma\mathbf{r}}^\dagger$ stvara elektron spina σ na položaju \mathbf{r} , $c_{\sigma'\mathbf{r}}$ stvara šupljinu spina σ' , a $H_0^{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}) = (-\hbar^2\nabla^2/2m^* - \mu)\delta_{\sigma\sigma'}$. H.c. označava hermitski konjugat. Hamiltonijan se može zapisati u matričnoj formi uvodeći tzv. *Nambu* spinore

$$\hat{\Psi}_{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} c_{\uparrow} \\ c_{\downarrow\mathbf{r}} \\ c_{\downarrow\mathbf{r}}^\dagger \\ -c_{\uparrow\mathbf{r}}^\dagger \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\psi}_{\mathbf{r}} \\ i\sigma^y \hat{\psi}_{\mathbf{r}}^* \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Izraz (3.2) zapisujemo u tzv. *Bogolyubov-de Gennes* (BdG) formalizmu

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) H_{BdG}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

gdje je

$$H_{BdG}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} H_0(\mathbf{r}) & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -\sigma^y H_0^*(\mathbf{r})\sigma^y \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

U posljednjem izrazu H_0 i Δ su 2×2 matrice u spinskom prostoru, a $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ su Paulijeve matrice. Ovdje bi bilo zgodno uvesti još jedan set matrica ekvivalentnih Paulijeve, $\tau = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$, koje djeluju u Nambu prostoru⁸.

Izraz $-\sigma^y H_0^*(\mathbf{r})\sigma^y$ je vremenski inverz od H_0 koji se javlja jer su šupljine zapravo vremenski inverz elektrona.

Problemi specificirani s (3.4) i (3.5) rješavaju se traženjem svojstvenih vrijednosti BdG hamiltonijana te svojstvenih funkcija

$$\Phi_n(\mathbf{r}) = [u_{n\uparrow}(\mathbf{r}), u_{n\downarrow}(\mathbf{r}), v_{n\uparrow}(\mathbf{r}), v_{n\downarrow}(\mathbf{r})]^T \quad (3.6)$$

koje zadovoljavaju stacionarnu BdG jednadžbu

$$H_{BdG}(\mathbf{r})\Phi_n(\mathbf{r}) = E_n\Phi_n(\mathbf{r}) \quad (3.7)$$

U bazi razapetoj ovim svojstvenim funkcijama, hamiltonijan (3.4) je dijagonalan i ima sljedeći oblik

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_n E_n \gamma_n^\dagger \gamma_n + E_0 \quad (3.8)$$

gdje su operatori kvazičestica zadani s

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \int d^d \mathbf{r} \Phi_n^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \\ &= \int d^d \mathbf{r} \left[u_{n,\uparrow}^*(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r},\uparrow} + u_{n,\downarrow}^*(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r},\downarrow} - v_{n,\uparrow}^*(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r},\downarrow}^\dagger + v_{n,\downarrow}^*(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r},\uparrow}^\dagger \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

U (3.8), faktor $\frac{1}{2}$ dodan je zbog toga što smo eksplicitno uključili šupljine kroz udvostručenje matrice hamiltonijana, čime smo udvostručili stupnjeve slobode sustava. Ovo nas navodi na zaključak da mora postojati simetrija svojstvenih stanja koja fiksira broj neovisnih rješenja. Očito se radi o simetriji elektrona i šupljina

$$\mathcal{P} H_{BdG}(\mathbf{r}) \mathcal{P}^\dagger = -H_{BdG}(\mathbf{r}), \mathcal{P} \equiv \mathcal{C}\mathcal{K} \quad (3.10)$$

⁸Prostor elektrona i šupljina.

pri čemu je $\mathcal{C} = \tau^y \sigma^y$ nabojna, a \mathcal{K} kompleksna konjugacija.

Navedeno svojstvo simetrije znači da za svako rješenje $\Phi_n(\mathbf{r})$, s pozitivnom energijom E_n , postoji rješenje $\Phi_m(\mathbf{r})$ s energijom $E_m = -E_n$, takvo da je

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \mathcal{P}\Phi_n(\mathbf{r}) \quad (3.11)$$

ili, ekvivalentno

$$\gamma = \gamma^\dagger \quad (3.12)$$

Drugim riječima, stvaranje Bogolyubove kvazičestice s energijom E je ekvivalentno uklanjanju čestice s $-E$.

Veza između BdG i Majorana teorije direktno se očituje u strukturi Nambu spinora definiranoj u (3.3). Zbog elektron-šupljina simetrije, Nambu spinor ispunjava Majorana uvjet realnosti (1.18)

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = P\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = C\hat{\Psi}^*(\mathbf{r}) \quad (3.13)$$

Zapravo, četverekomponentni Nambu spinor (3.3) nije ništa drugo nego operatorska inačica Majorana polja (1.29), što se očituje u povezanosti gornjih i donjih komponenata spinora.

Za razliku od Diracove jednadžbe, gdje smo imali izbor između Diracovog i Majorana rješenja, teorija supravodljivosti zahtijeva opis u terminima Majorana čestica. Osim navedenog, kao što smo već spominjali u opisu BCS teorije, struktura hamiltonijana (3.8) jednaka je strukturi hamiltonijana Majorana polja.

Možemo zaključiti da kvazičestice u Bogolyubov-de Gennes teoriji posjeduju sva ključna svojstva Majorana čestica - električki su neutralni fermioni među kojima ne možemo razlikovati čestice od antičestica. Energijski procijep Δ igra ulogu Majorana mase [16].

3.1 Majorana nul modovi

Gledajući jednadžbu (3.7) možemo se zapitati postoje li rješenja takva da je

$$\gamma = \gamma^\dagger \longrightarrow E_n = 0$$

Ovo zahtijeva da (najmanje) sljedeća dva uvjeta budu ispunjena:

1) ista spinska struktura $u(\mathbf{r})$ i $v(\mathbf{r})$ u (3.7), što znači ili spin nula ili spinski triplet, a ne singlet kao što smo imali u originalnoj BCS teoriji

2) vrijedi $u(\mathbf{r}) = v^*(\mathbf{r})$

Razlog fokusiranja na Majorana nul modove (dalje u tekstu MZM, *Majorana zero mode*) jest što na taj način izbjegavamo vremensku ovisnost. MZM čine specijalan slučaj Majorana fermiona koji su obično lokalizirani u blizini defekta u supravodiču, poput kvantnih vrtloga⁹ ili domenskih zidova¹⁰. Ovome ćemo se više posvetiti kasnije u konkretnim primjerima supravodiča. Kao što je već spomenuto, stacionarno rješenje BdG jednadžbe je nužno rješenje na energiji nula

$$H_{BdG}(\mathbf{r})\Phi_0(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.14)$$

gdje spinor $\Phi(\mathbf{r})$ zadovoljava uvjet $\Phi_0(\mathbf{r}) = \mathcal{P}\Phi_0(\mathbf{r})$:

$$\begin{pmatrix} u_{0,\uparrow}(\mathbf{r}) \\ u_{0,\downarrow}(\mathbf{r}) \\ v_{0,\uparrow}(\mathbf{r}) \\ v_{0,\downarrow}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0,\uparrow}^*(\mathbf{r}) \\ u_{0,\downarrow}^*(\mathbf{r}) \\ v_{0,\uparrow}^*(\mathbf{r}) \\ v_{0,\downarrow}^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_{0,\downarrow}^*(\mathbf{r}) \\ v_{0,\uparrow}^*(\mathbf{r}) \\ u_{0,\downarrow}^*(\mathbf{r}) \\ -u_{0,\uparrow}^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

što implicira da je generalni oblik Majorana spinora

$$\begin{pmatrix} u_{0\uparrow} \\ u_{0\downarrow} \\ v_{0\uparrow} \\ v_{0\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_{0\downarrow}^* \\ v_{0\uparrow}^* \\ u_{0\downarrow}^* \\ -u_{0\uparrow}^* \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

⁹Kvantizirani cirkularni tok neke fizikalne veličine. U većini slučajeva, kvantni vrtlozi su tip topološkog defekta u superfluidima i supravodičima.

¹⁰Pojavljuju se onda kada dvije pridružene prostorne strukture nisu *u fazi*, na način da ne možemo glatko prijeći iz jedne u drugu.

gdje smo zbog jednostavnosti izostavili ovisnost o položaju.

Uvrštavajući u izraz za kvazičestični operator (3.9) dobivamo

$$\hat{\psi}_0 = i \int d^d \mathbf{r} \left[u_{0,\uparrow}^*(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r},\uparrow} + u_{0,\downarrow}^*(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r},\downarrow} - u_{0,\downarrow}(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r},\downarrow}^\dagger - u_{0,\uparrow}(\mathbf{r}) c_{\mathbf{r},\uparrow}^\dagger \right] \quad (3.17)$$

gdje je faktor i dodan zbog praktičnosti. Očito je da je ovako definiran operator hermitski. Iz ovoga zaključujemo sljedeće: ako je $|0\rangle$ osnovno stanje, također je i $\hat{\psi}_0 |0\rangle$ - osnovno stanje je degenerirano. No, kako ne možemo formirati operator broja čestica od MZM-ova, što je posljedica relacije

$$\hat{\psi}_0^\dagger \hat{\psi}_0 = \hat{\psi}_0 \hat{\psi}_0 = 1 \text{ (uvijek)}$$

slijedi da je nemoguće konstruirati osnovno stanje od Majorana nul modova. Konkretno, ako se prisjetimo izraza (3.1), degeneracija jednog MZM-a iznosi $\sqrt{2}$. Treba primjetiti da smo krenuli od pretpostavke da MZM zaista postoje, što je zapravo vrlo specifična situacija. Simetrija koju smo koristili, $\Phi_n = \mathcal{P}\Phi_n$ sa $E_n = -E_n = 0$, zapravo nije generalna simetrija BdG hamiltonijana, već je to $\Phi_m = \mathcal{P}\Phi_n$ sa $E_m = -E_n$. Ako jedan od ovih MZM-a postoji, simetrija zahtijeva da se pojavi i drugi mod na energiji $-E$, što narušava unitarnost. Navedeni razlozi impliciraju da su MZM-ovi, ako postoje u sustavu, topološki zaštićeni energijskim procijepom koji ih odvaja od svih ostalih stanja. Topološka zaštićenost dolazi od činjenice da MZM-ovi ne mogu poprimiti vrijednost energije $E \neq 0$ bilo kakvom glatkom deformacijom hamiltonijana (koja ne zatvara energijski procijep). No, ako se procijep i zatvori, ništa ne spriječava sustav da ponovno otvori procijep kroz standardna BdG pobuđenja. Otvaranje/zatvaranje energijskog procijepa je primjer topološkog prijelaza - prijelaza koji razdvaja dvije faze karakterizirane topološkom invarijantom¹¹ koja, u ovom slučaju na neki način broji MZM-ove.

Supravodiče s navedenim svojstvima zovemo topološkim i ispostavlja se da su vrlo rijetki u prirodi. Nadalje, jedan nespareni MZM može postojati isključivo u beskonačnim sustavima. U konačnim, MZM-ovi se uvijek pojavljuju u parovima, no ako se oni prostorno razdvoje tako da se individualne valne funkcije ne preklapaju, lokalno postoji jedan MZM. Ako ovakvim sustavima možemo manipulirati, superpozicijom dvaju MZM-ova možemo stvoriti fermionsku kvazičesticu $a^\dagger \equiv \gamma_i^\dagger + i\gamma_j^\dagger$ energije 0. Ovakav fermion je delokaliziran

¹¹Svojstvo prostora koje je očuvano pod homeomorfizmima-kontinuiranim, invertibilnim prijelazom među topološkim prostorima. Drugačije rečeno, prostor X je topološki invarijantan ako svi prostori homeomorfni prostoru X imaju ista svojstva.

na proizvoljno velikoj udaljenosti unutar supravodiča. Upravo ćemo ovakav primjer u nastavku opisati. Prije toga treba spomenuti još jedno bitno svojstvo spomenutih sustava koje nema analogiju u čestičnoj fizici. Ako postoji način za manipulaciju MZM-ova, njihova izmjena mora biti prikazana unitarnom matricom. Ako u sustavu postoji veći broj nul modova¹² tada će uzastopna promjena biti prikazana produktom unitarnih matrica što nije komutativna operacija - izmjena modova vodi na neabelovu statistiku i ispravno ih je tretirati kao neabelove anione. Danas se intenzivno radi na fizikalnoj realizaciji opisanih sustava zbog moguće primjene ne-Abelove statistike u kvantnim računalima, o čemu ćemo raspravljati u posljednjem poglavlju ovog rada.

Naravno, sve do sada rečeno odnosi se na idealne fizikalne sustave. U realnim sustavima, ako imamo sreće, mogu postojati kvazičestični operatori koji zadovoljavaju antikomutacijske relacije (2.15) te

$$[H, \gamma_i] \sim e^{-\frac{|r|}{\zeta}} \quad (3.18)$$

gdje je ζ korelacijska duljina vezana uz hamiltonijan H , a r je spomenuta udaljenost na koju možemo razdvojiti MZM-ove. U supravodljivim sustavima ζ će biti duljina koherencije. Da bi postigli idealne uvjete $[H, \gamma_i] = 0$ razmak r mora biti puno veći od duljine koherencije.

¹²N operatora vodi na degeneraciju osnovnog stanja 2^N .

3.2 Jednodimenzionalni model - Kitaev lanac

Najjednostavniji primjer u kojem se pojavljuju nesporeni Majorana nul modovi je tzv. Kitaev lanac - lanac *spinless* fermiona [17]. Ova rečenica je kontraintuitivna - koristimo riječ fermion, koja označava čestice polucjelobrojnog spina, a promatramo sustav koji nema spin. Zapravo se radi o tome da se zanimljivim manipulacijama sustava, koje ćemo komentirati kasnije, fermioni mogu polarizirati tako da im se "zamrzne" jedna spinska komponenta pa ih tretiramo kao da nemaju spin. Supravodiči s tim svojstvom nazivaju se *p-wave* supravodiči. Iako maksimalno simplificiran, ovaj *toy* model čini temelje za sve ostale sustave stoga ga je potrebno detaljno razumjeti.

Kitaev lanac sastoji se od $N \gg 1$ ćelija, a opisan je sljedećim minimalnim hamiltonijanom

$$H = -\mu \sum_{i=1}^N (c_i^\dagger c_i) - \sum_{i=1}^{N-1} \left[t c_i^\dagger c_{i+1} + |\Delta| e^{i\phi} c_i c_{i+1} + h.c. \right] \quad (3.19)$$

gdje operatori c_i opisuju fermione bez spina u i -toj ćeliji koji mogu "skakati" između N ćelija. μ je kemijski potencijal, $t \geq 0$ je amplituda skoka među susjednim ćelijama, Δ je amplituda stvaranja parova p -tipa, a ϕ je odgovarajuća supravodljiva faza, koju privremeno možemo namjestiti na nulu, bez gubitka na općenitosti. Prvi član hamiltonijana interpretira se kao konstantna promjena energije zbog stvaranja elektrona/šupljina, promislirana preko svih fermiona u sustavu, drugi član označava da je skok među ćelijama dozvoljen uz cijenu energije t , a posljednji član je odgovoran za otvaranje energijskog procijepa stvaranjem/poništanjem Cooperovih parova od dvaju susjednih elektrona.

Prelazimo u prostor impulsa Fourierovim transformatom operatora

$$\begin{aligned} \hat{c}_j^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \\ \hat{c}_j &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \hat{c}_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

gdje $0 \leq k \leq \frac{2\pi n}{\alpha N}$, $n = 0, 1, \dots, N$, a \mathbf{r}_j označava položaj j -tog fermiona, koji će poprimiti vrijednosti $i, i+1$ kojima smo označili položaje ćelija.

Invertiranjem dobivamo

$$\begin{aligned}\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} c_j^\dagger \\ \hat{c}_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \hat{c}_j\end{aligned}\tag{3.21}$$

Korisne će biti i sljedeće relacije

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} &= \sum_j e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}_j} = N\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} &= N\delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\end{aligned}\tag{3.22}$$

Fourierov transformat hamiltonijana detaljno je raspisan u dodatku (A.1), ovdje ćemo prikazati krajnji rezultat

$$\begin{aligned}H &= \sum_{\mathbf{k}} \left(-\mu - 2t \left(1 - \frac{1}{N} \right) \cos(k\alpha) \right) c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \\ &\quad + \Delta \left(1 - \frac{1}{N} \right) \sum_{\mathbf{k}} \left(e^{i\mathbf{k}\alpha} c_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} + e^{-i\mathbf{k}\alpha} c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{-\mathbf{k}}^\dagger \right)\end{aligned}\tag{3.23}$$

Faktori $(1 - \frac{1}{N})$ su posljedica otvorenih rubnih uvjeta, odnosno konačnog sustava. Periodične rubne uvjete možemo nametnuti savijanjem lanca u zatvoreni cilindar¹³ tako da $(1 - \frac{1}{N}) \rightarrow 1$, što je ekvivalentno razmatranju beskonačnog lanca ($N \rightarrow \infty$).

Hamiltonijan se sada mijenja u

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}} + \Delta \sum_{\mathbf{k}} \left(e^{i\mathbf{k}\alpha} c_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} + e^{-i\mathbf{k}\alpha} c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{-\mathbf{k}}^\dagger \right)\tag{3.24}$$

Za čestice bez spina, vezanje mora imati neparan paritet $\Delta(-k) = -\Delta(k)$. Sljedeći korak je zapisati hamiltonijan u BdG formalizmu. Zbog jednostavnosti pisanja, koristit ćemo dvodimenzionalne Nambu spinore $C_{\mathbf{k}}^\dagger = (c_{\mathbf{k}}^\dagger, c_{-\mathbf{k}})$, no čitatelj ih može proširiti na četverodimenzionalne, bez da utječe na fiziku sustava, kao što smo to napravili u (3.3).

$$H_{BdG} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}^\dagger \mathcal{H}_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}, \quad \mathcal{H}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{k}} & \tilde{\Delta}_{\mathbf{k}}^* \\ \tilde{\Delta}_{\mathbf{k}} & -\xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}\tag{3.25}$$

¹³tzv. *bulk* sustavi

gdje je sada $0 \leq k \leq 2\pi$, $\xi_k = -\mu - 2t \cos(k\alpha)$, $\tilde{\Delta}_k = -2i\Delta e^{i\phi} \sin(k\alpha)$ pri čemu smo u Fourierov transformat energije stvaranja parova vratili početnu fazu ϕ . Jednostavnosti radi, postaviti ćemo konstantu rešetke na jedinicu.

Hamiltonijan se sada lako može dijagonalizirati prelaskom u Majorana bazu (2.21), pri čemu nam trebaju samo svojstvene vrijednosti od \mathcal{H}

$$\lambda(\mathcal{H}) = \pm \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\tilde{\Delta}_{\mathbf{k}}|^2} \equiv E_{\mathbf{k}} \quad (3.26)$$

čime dobivamo

$$H = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}} + E_0 \quad (3.27)$$

gdje je E_0 energija osnovnog stanja koja dolazi od antikomutacijskih relacija, $E_{\mathbf{k}} \geq 0$. Sada možemo napisati (najjednostavniju) BdG jednadžbu prema izrazu (3.7)

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} &= \xi_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} - \Delta_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} \\ E_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} &= -\xi_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} - \Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Rješavanjem sustava jednadžbi dobivamo koeficijente iz BCS teorije

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{k}}/u_{\mathbf{k}} &= -(E_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}})/\Delta_{\mathbf{k}}^* \\ |u_{\mathbf{k}}|^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \\ |v_{\mathbf{k}}|^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

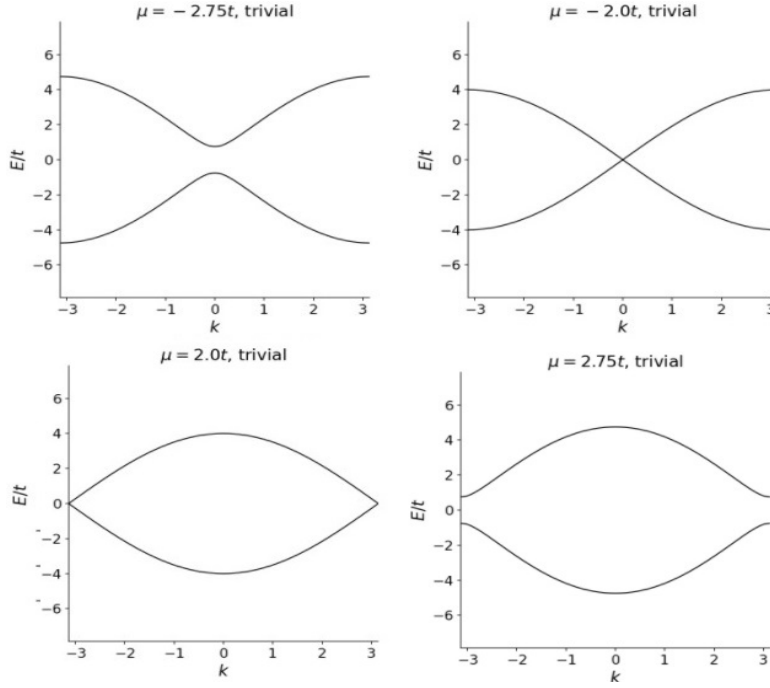
Gledajući disperzijsku relaciju za Kitaev lanac (3.26), vidimo da će energijski procijep biti zatvoren ($\tilde{\Delta}_{\mathbf{k}} = 0$) onda kada je $\sin k = 0$

$$\text{Za } k = 0 \rightarrow 2t + \mu = 0 \rightarrow \mu = -2t$$

$$\text{Za } k = \pm\pi \rightarrow 2t - \mu = 0 \rightarrow \mu = 2t$$

Odnosno, vezanje p-tipa otvara energijski procijep, osim kada je kemijski potencijal tuniran na $\mu = \pm 2t$, kada se Fermijev nivo podudara s gornjom i donjom vodljivom vrpcom (slika 3.2). Drugačije rečeno, stvaranje Cooperovih parova je zabranjeno za $k = 0, \pm\pi$ zbog čega sustav nema energijskog procijepa na Fermijevom nivou [18]. Dvije faze, $\mu > 2t$ i $\mu < -2t$, su povezane elektron-šupljina simetrijom. Grafovi na slici niže prikazuju otva-

ranje/zatvaranje energijskog procijepa za različite vrijednosti kemijskog potencijala u odnosu na parametar t .



Slika 3.1: Faze Kitaeva lanca: Jasno se vidi kako se energijski procijep zatvara za $\mu = \pm 2t$, odnosno za $k = 0, \pm\pi$.

Gledajući prikazane grafove nije odmah očito da zatvaranje procijepa razdvaja dvije različite faze. Kada je procijep otvoren na cijelom Fermijevom nivou (*fully gaped system*), fizika sustava se razlikuje za područja $\mu < -2t$ i $|\mu| < 2t$. Područje s $\mu < -2t$ se glatko povezuje s vakuumom u kojem nema fermiona ($\mu \rightarrow -\infty$), dok je područje $|\mu| < 2t$ obilježeno djelomično popunjenom vrpcom koja se popunjava zbog vezanja p-tipa ($\Delta e^{i\phi}$).

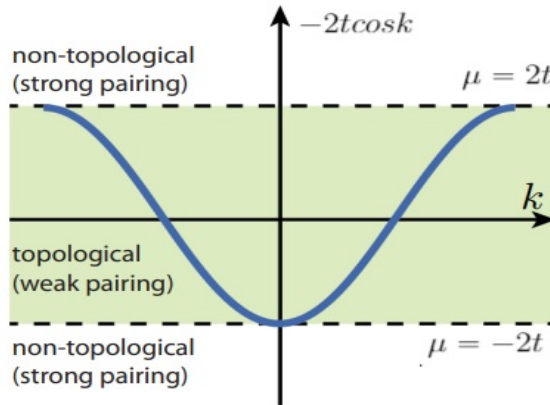
$$\begin{aligned}
 |\mu| > 2t & \text{ postoji procijep - trivijalna faza} \\
 \mu = \pm 2t & \text{ nema procijepa} \\
 |\mu| < 2t & \text{ postoji procijep - topološka faza}
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

Dvije faze s energijskim procijepom odgovaraju različitim režimima vezivanja Cooperovih parova. Ako promotrimo osnovno stanje koje zadovoljava $\gamma_k |0\rangle = 0, \forall k$, ono će biti oblika

$$|g.s.\rangle \propto \prod_{0 < \mathbf{k} < \pi} \left(1 + \frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}}^{\dagger} \right) |0\rangle
 \tag{3.31}$$

gdje je $|0\rangle$ vakuum fermiona koje stvaraju $c_{\mathbf{k}}^\dagger$. Kvocijent $v_{\mathbf{k}}/u_{\mathbf{k}}$ se može interpretirati kao valna funkcija Cooperovog para $\varphi_{C.p.}$. Analizom prostornog dijela ove valne funkcije [19], tj. Fourierovom transformacijom u realan prostor $\varphi_{C.p.}(x) = \int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}x} \varphi_{C.p.}(\mathbf{k})$, otkriva se razlika između područja $\mu < -2t$ i $|\mu| < 2t$:

$$|\varphi_{C.p.}(x)| \sim \begin{cases} e^{-|x|/\zeta}, \mu < -2t & \text{(jako vezanje)} \\ \text{konst.}, |\mu| < 2t & \text{(slabo vezanje)} \end{cases} \quad (3.32)$$



Slika 3.2: Kinetička energija Kitaeva modela za 1D supravodič p-tipa

Prema [20], područje za koje je $|\mu| < -2t$ odgovara jakom režimu (jako vezanje parova), u kojem Cooperovi parovi formiraju vezano stanje u realnom prostoru na udaljenosti ζ . U području slabog vezanja, $|\mu| < 2t$, slijedi da $\zeta \rightarrow \infty$, odnosno $\varphi_{C.p.} \sim \text{konst.}$.

Još uvijek ne možemo tvrditi da ova dva područja predstavljaju različite faze. Razlika među fazama leži u njihovoj topologiji, a topološki brojevi na neki način broje Majorane na rubovima sustava (*bulk-edge correspondence*). Kako dvije faze posjeduju iste simetrije, prijelaz među njima je posebna vrsta faznog prijelaza koje se naziva topološki fazni prijelaz, a događa se prilikom zatvaranja/otvaranja energijskog procijepa.

3.2.1 Topološka invarijanta

Topološke invarijantne pojedinih režima otkrivaju se analizom hamiltonijana sustava. Postoji više načina za njihovo dobivanje, mi ćemo slijediti primjer iz [18]. Ako se podsjetimo relacije (2.13) i činjenice da je množenje koeficijenata $u(\mathbf{k})$ i $v(\mathbf{k})$ s faznim faktorom irelevantno, implikacija je da koeficijente (odnosno funkcije) možemo vidjeti kao koordinate na sferi \mathcal{S}^2 . Uobičajeno je da $u = 1, v = 0$ predstavlja točku sjevernog pola, a $u = 0, v = 1$ južnog. Alternativno, sferu možemo parametrizirati i na način da hamiltonijanu zadanom sa (3.25) dopustimo dodatne perturbacije koje čuvaju translacijsku simetriju (koristimo samo za konstrukciju topološke invarijantne, sama fizika se ne oslanja na ovu simetriju). Kada je ovaj uvjet zadovoljen, hamiltonijan se može napisati na sljedeći način

$$\mathcal{H}_k = \mathbf{h}(k) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.33)$$

gdje je $\boldsymbol{\sigma} = \sigma^x \hat{\mathbf{x}} + \sigma^y \hat{\mathbf{y}} + \sigma^z \hat{\mathbf{z}}$, a $\mathbf{h}(k) = -(0, \Delta_0 \sin k, t \cos k + \mu)$, što je ekvivalentno parametrizaciji sa u i v . Ovako definiran vektor zadovoljava sljedeća svojstva

$$h_{x,y}(k) = -h_{xy}(-k), \quad h_z(k) = h_z(-k) \quad (3.34)$$

Gornje relacije sugeriraju da je dovoljno specificirati $\mathbf{h}(k)$ na domeni $0 \leq k \leq \pi$. tj. na polovici Brillouinove zone¹⁴. Ako pretpostavimo da je $\mathbf{h}(k)$ neprekidan na cijeloj Brillouinovoj zoni, tako da cijeli sustav ima energijski procijep, možemo definirati jedinični vektor

$$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{h}(k)}{|\mathbf{h}(k)|}$$

koji će mapirati Brillouinovu zonu na jediničnu sferu. Kako k poprima vrijednosti od 0 do π , jedinični vektor će iscrtavati trajektorije prikazane na slici niže. Možemo odrediti jedinični vektor za zadane vrijednosti k

$$\hat{\mathbf{h}}(0) = (0, 0, 1), \quad \hat{\mathbf{h}}(\pi) = (0, 0, -1) \quad (3.35)$$

¹⁴Jedinstveno definirana primitivna ćelija u recipročnom prostoru.

Upravo nam ovo govore uvjeti (3.34). Drugim riječima, simetrične vrijednosti $k = 0$ i $k = \pi$ su fiksirani na z-osi sfere pa klasifikacija slijedi prirodno

$$\hat{\mathbf{h}}(0) = s_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad \hat{\mathbf{h}}(\pi) = s_\pi \hat{\mathbf{z}} \quad (3.36)$$

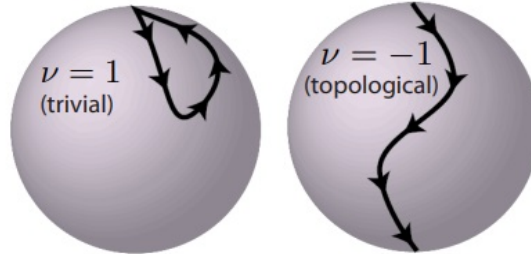
gdje s_0 i s_π označavaju predznak kinetičke energije kada je $k = 0, \pi$, respektivno, a mjereno u odnosu na Fermijev nivo. S obzirom na zadani uvjet, $\hat{\mathbf{h}}(k)$ počinje iz jednog od polova sfere, a može opisati dvije različite trajektorije tako da

- (i) završava u istom polu ako je $s_0 = s_\pi$
- (ii) završava u suprotnom polu ako je $s_0 = -s_\pi$

Ove dvije trajektorije razlikuje Z_2 topološka invarijanta

$$\nu = s_0 s_\pi = \begin{cases} +1 \rightarrow \text{trivijalna faza} \\ -1 \rightarrow \text{topološka faza} \end{cases} \quad (3.37)$$

koja mijenja predznak prilikom zatvaranja energijskog procijepa, tj. prilikom topološkog faznog prijelaza.



Slika 3.3: Mapiranje Brillouinove zone na jediničnu sferu. $\nu = \pm 1$ označava topološku invarijantnu za različite trajektorije.

3.2.2 Majorana modovi

U svom originalnom članku [17], Kitaev topološku invarijantnu naziva *Majorana brojem*. Razlog tome jest prisutnost (ili nepristutnost) nesparenih Majorana modova na rubovima lanca u različitim fazama.

Prelazimo u Majorana bazu¹⁵

$$c_i = \frac{e^{-i\phi/2}}{2}(\gamma_{i,1} + i\gamma_{i,2}), \quad c_i^\dagger = \frac{e^{i\phi/2}}{2}(\gamma_{i,1} - i\gamma_{i,2}) \quad (3.38)$$

Račun je malo duži, ali trivijalan pa ga nećemo ovdje prikazati. Koristeći standardne fermionske antikomutacijske relacije (2.8) za oba indeksa i imajući na umu da je $\gamma = \gamma^\dagger$, $\gamma^2 = 1$ dobivamo

$$H = -\frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^N (1 + i\gamma_{i,2}\gamma_{i,1}) - \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{N-1} [(\Delta + t)\gamma_{i,2}\gamma_{i+1,1} + (\Delta - t)\gamma_{i,1}\gamma_{i+1,2}] \quad (3.39)$$

Parametri μ, t, Δ u pravilu induciraju kompleksno vezanje među Majorana modovima, no u dva limesa slučaj se značajno pojednostavljuje:

1) Topološki trivijalna faza: $\mu \neq 0, t = \Delta = 0$

$$H = -\frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^N (1 - \gamma_{i,1}\gamma_{i,2}) = -\mu \sum_{i=1}^N n_i \quad (3.40)$$

Majorane iz iste ćelije vezuju se u fermion, oduzimanje/dodavanje fermiona uključuje promjenu energije μ .

2) Topološka faza¹⁶: $\mu = 0, t = \Delta \neq 0$

$$H = -it \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_{i,1}\gamma_{i+1,2} \quad (3.41)$$

¹⁵U principu se svaki fermion može rastaviti u par Majorana fermiona, analogno rastavljanju kompleksnog broja u realan i imaginarni dio, no to dobiva na smislu samo ako Majorane možemo prostorno razdvojiti. Ako su "isprepletene" u prostoru, nema ih smisla opisivati kao odvojene entitete.

¹⁶Već smo komentirali kako je stvaranje/oduzimanje fermiona konstantna promjena energije za μ pa možemo postaviti $\mu = 0$ u svrhu jednostavnosti onoga što želimo pokazati

Ovaj hamiltonijan prikazuje netrivialno vezanje Majorana modova koje se može otkriti jednostavnim trikom

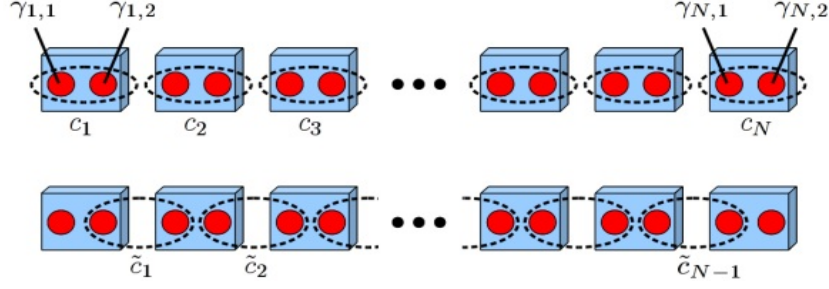
$$\begin{aligned}
 H &= -it \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_{i,2} \gamma_{i+1,1} = -t \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2} (1 + 2i\gamma_{i,2}\gamma_{i+1,1} + 1 - 2) \\
 &= t \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2} (\gamma_{i,2}\gamma_{i,2} - i\gamma_{i,2}\gamma_{i+1,1} + i\gamma_{i+1,1}\gamma_{i,2} + \gamma_{i+1,1}\gamma_{i+1,1} - 2) \\
 &= 2t \sum_{i=1}^{N-1} \left[\left(\frac{\gamma_{i+1,1} - i\gamma_{i,2}}{2} \right) \left(\frac{\gamma_{i+1,1} + i\gamma_{i,2}}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] \\
 &= 2t \sum_{i=1}^{N-1} \left(f^\dagger f - \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Ovdje se možemo zapitati što zapravo radimo. Uzeli smo fermionske operatore, prešli u Majorana bazu da bi ih na kraju opet napisali kao fermionske operatore. Postupak izgleda kao da se vrtimo u krug, ali ako smo pažljivi možemo uočiti jednu posebnu značajku hamiltonijana zadanog sa (3.42). Ako pogledamo gornju granicu naše sume (N-1) (otvoreni rubni uvjeti), postaje jasno da dva Majorana operatora nedostaju ($\gamma_{1,1}, \gamma_{N,2}$). Od njih možemo konstruirati fermion na sljedeći način

$$f = \frac{\gamma_{N,2} + i\gamma_{1,1}}{2} \tag{3.43}$$

Oavko konstruiran fermion je delokaliziran na dva kraja lanca. Kako ne ulazi u hamiltonijan, "košta" nula energije stvoriti takav fermion - $\gamma_{1,1}, \gamma_{N,2}$ su MZM-ovi! Rubovi lanca predstavljaju domenske zidove (engl. *domain walls*) između topološke faze, dok je trivialna faza prikazana vakuumom izvan sustava. Ovo dalje znači da je osnovno stanje dvaput degenerirano¹⁷: ako je $|0\rangle$ osnovno stanje, tada je i $f^\dagger |0\rangle \equiv |1\rangle$ također osnovno stanje. Spektar se sastoji od Majorana modova na energiji nula i simetričnog kvazičestičnog kontinuuma izvan energijskog procijepa na pozitivnim i negativnim energijama. Ako deformiramo BdG hamiltonijan mijenjajući parametre, dokle god ne zatvorimo energijski procijep simetrija između pozitivnih i negativnih energija implicira da će MZM-ovi ostati na energiji nula.

¹⁷Što nas vodi na neabelovu statistiku.



Slika 3.4: Trivijalno i netrivialno vezanje Majorana fermiona u Kitaevu lancu. Na donjoj slici se mogu uočiti nespareni Majorana modovi lokalizirani na rubovima lanca.

Upravo degeneracija osnovnog stanja čini razliku topoloških i konvencionalnih supravodiča gdje postoji jedinstveno osnovno stanje s parnim brojem elektrona tako da svi formiraju Cooperove parove¹⁸. U kontrastu, degenerirano osnovno stanje u topološki netrivialnoj fazi razlikuje se za točno jedno fermionsko stanje opisano s (3.41), dakle, osnovna stanja za dvije različite topološke faze razlikuju se u paritetu. Iako *mean-field* hamiltonijan ne čuva broj čestica, s obzirom da se operatori c^\dagger, c uvijek pojavljuju u parovima, paritet je očuvan i ostaje dobar kvantni broj za opis sustava, $[H, P] = 0$. Prema (3.40) možemo ga napisati kao

$$P = f^\dagger f - 1 = -i\gamma_2\gamma_1 = i\gamma_1\gamma_2 \quad (3.44)$$

sa svojstvenim vrijednostima ± 1 , gdje je $\gamma_1 \equiv \gamma_{i,1}, \gamma_2 \equiv \gamma_{i+1,2}$. S obzirom da se svako fermionsko stanje može napisati kao kombinacija dvaju Majorana stanja, ako ima $2N$ Majorana stanja možemo ih grupirati u N fermiona. Svako od konstruiranih fermionskih stanja može biti popunjeno ili ne, prema tome imamo degeneraciju 2^N . Nadalje, 2^N stanja mogu se grupirati ovisno o paritetu. Operator pariteta će u tom slučaju biti produkt fermionskih operatora pariteta $P_i = f_i^\dagger f_i - 1$ za svaki par, odnosno

$$P = i^N \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_N \quad (3.45)$$

Postoji 2^{N-1} osnovnih stanja za svaku vrijednost pariteta.

Prethodna analiza napravljena je pretpostavljajući tzv. idealnu kvantnu žicu ($\Delta = t, \mu = 0$), no kao što smo vidjeli u prvom dijelu ovog odjeljka, do pojave Majorana rubnih stanja i degeneriranog osnovnog stanja dolazi jer Kitaev lanac formira topološku fazu dok je

¹⁸Svako stanje s neparnim brojem fermiona bi automatski imalo jedan nespareni elektron što je manje zastupljeno nego potpuno spareno stanje.

vakuum koji ga okružuje trivijalan. Drugačije rečeno, Majorana rubna stanja će postojati dokle god vrijedi $|\mu| < 2t$. U općenitijoj situaciji, $\mu \neq 0, \Delta \neq t$, rubna stanja (ili MZM-ovi) neće biti jednostavno zadani sa $\gamma_{1,1}, \gamma_{N,2}$, već će njihove valne funkcije trnuti kako se odmičemo od ruba, tj. biti će eksponencijalno lokalizirani na rubovima. Ako pogledamo osnovno stanje, preklapanje valnih funkcija rezultira degeneracijom stanja koja se nalaze simetrično oko nulte energije. Raspodjela energije opada eksponencijalno s duljinom lanca kao $e^{-\frac{L}{\zeta}}$, gdje je L duljina lanca, a ζ duljina koherencije. Za $L \gg \zeta$, faktor $e^{-\frac{L}{\zeta}}$ je zanemariv u odnosu na relevantne energijske skale. Na kraju, možemo se vratiti na važnost spina, ili bolje rečeno nedostatka spina, prilikom analize ovog modela. Da radimo sa uobičajenim fermionima, spin bi udvostručio degeneraciju¹⁹ za svako svojstveno stanje hamiltonijana - na svakom rubu bismo našli par Majorana, odnosno jedan standardni fermion. Dakle, da bismo mogli obzervirati izolirane MZM-ove potreban je mehanizam kojim ćemo zamrznuti jednu komponentu spina kako bi izbjegli Kramerovu degeneraciju. Kasnije ćemo razmotriti neke od načina kako se ovo može postići.

¹⁹Kramerova degeneracija.

3.3 2D p+ip kiralni supravodič

Najjednostavniji 2D sustav spinski polariziranih elektrona koji ostvaruje Majorana rubna stanja opisan je sljedećim minimalnim hamiltonijanom

$$H = \int d^2\mathbf{r} \left\{ \psi^\dagger \left(-\frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \psi + \frac{\Delta}{2} \left[e^{i\phi} \psi (\partial_x + i\partial_y) \psi + h.c. \right] \right\} \quad (3.46)$$

gdje $\psi^\dagger(\mathbf{r})$ stvara česticu bez spina, efektivne mase m , μ je kemijski potencijal, a $\Delta \geq 0$ je amplituda vezanja p-tipa koju ćemo privremeno uzeti da je uniformna. ϕ je supravodljiva faza. Recept je isti kao za 1D model - prvo ispitujemo sustav s zatvorenim rubnim uvjetima (*bulk system*) da bismo otkrili netrivialnu topologiju, a zatim promatramo otvorene rubne uvjete i potencijalnu pojavu MZM-ova.

U sustavu s periodičnim rubnim uvjetima u smjeru x,y (torus bez rubova), translacijska simetrija dopušta dijagonalizaciju hamiltonijana. Definiramo dvokomponentni Nambu spinor²⁰

$$\Psi^\dagger(\mathbf{k}) = [\psi^\dagger(\mathbf{k}), \psi(-\mathbf{k})]$$

čime dobivamo BdG hamiltonijan

$$H_{BdG} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \Psi^\dagger(\mathbf{k}) \mathcal{H}(\mathbf{k}) \Psi(\mathbf{k}) \quad (3.47)$$

gdje je

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{k}} & \tilde{\Delta}_{\mathbf{k}}^* \\ \tilde{\Delta}_{\mathbf{k}} & -\xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Kao i ranije, $\xi_{\mathbf{k}} = \frac{k^2}{2m} - \mu$. Za vezanje p-tipa svojstvena vrijednost angularnog momenta je $l = 1$ pa magnetski moment može biti $m = 0, \pm 1$. Sferni harmonici, $Y_{l,m}$, su $Y_{1,\pm 1} \propto k_x \pm ik_y$, $Y_{1,0} \propto k_z$. Mi ćemo odabrati $m = 1$ pa je generička forma amplitude stvaranja parova za male vrijednosti \mathbf{k} zadana s

$$\tilde{\Delta}_{\mathbf{k}} \simeq i\Delta e^{i\phi} (k_x + ik_y), \quad \Delta = konst. \quad (3.49)$$

²⁰kojeg možemo proširiti na četverokomponentni.

Prelaskom u Majorana bazu

$$a(\mathbf{k}) = u_{\mathbf{k}}\psi(\mathbf{k}) + v_{\mathbf{k}}\psi^\dagger(-\mathbf{k}) \quad (3.50)$$

dijagonaliziramo BdG hamiltonijan

$$H = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} E_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \quad (3.51)$$

gdje je $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\tilde{\Delta}_{\mathbf{k}}|^2}$. Koeficijenti $u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}}$ imaju su isti onima u (3.52)

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{k}}/u_{\mathbf{k}} &= -(E_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}})/\Delta_{\mathbf{k}}^* \\ |u_{\mathbf{k}}|^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \\ |v_{\mathbf{k}}|^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Kada $\mathbf{k} \rightarrow 0$ slijedi $E_{\mathbf{k}} - |\xi_{\mathbf{k}}| \rightarrow 0$, iz čega slijedi da imamo tri moguća ponašanja sustava za mali \mathbf{k}

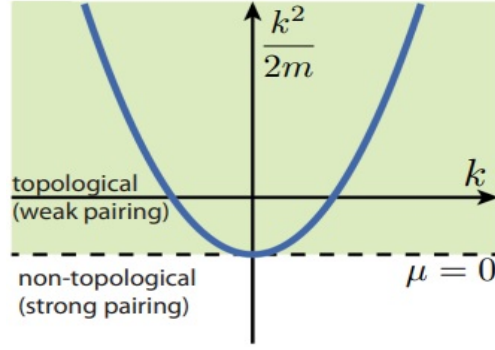
- (i) $\xi_{\mathbf{k}} > 0$, $|u_{\mathbf{k}}| \rightarrow 1, |v_{\mathbf{k}}| \rightarrow 0$
- (ii) $\xi_{\mathbf{k}} < 0$, $|u_{\mathbf{k}}| \rightarrow 0, |v_{\mathbf{k}}| \rightarrow 1$
- (iii) $\xi_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$, $|u_{\mathbf{k}}|, |v_{\mathbf{k}}| \neq 0$

Prvi slučaj predstavlja jaku fazu, drugi slabu, a treći predstavlja fazni prijelaz (gdje $\Delta_{\mathbf{k}}$ isčezava) između jake i slabe faze. U našoj parametrizaciji, slično kao u 1D slučaju

- (i) $\mu < 0$ jaka faza
- (ii) $\mu > 0$ slaba faza
- (iii) $\mu = 0$ fazni prijelaz

Za svaki $\mu > 0$ sustav ima energijski procijep s obzirom da je $\tilde{\Delta}_{\mathbf{k}} \neq 0$ na cijeloj Fermijevoj površini. Kako se stvaranjem Cooperovih parova iscrpljuje vodljiva vrpca, $\tilde{\Delta}_{\mathbf{k}} \neq 0$ se smanjuje i zatvara kada je $\mu = 0$ ²¹. U tom slučaju se Fermijev nivo nalazi točno na dnu vrpce kao što prikazuje slika niže. Daljnjim smanjivanjem potencijala ponovo se otvara procijep i ostaje konstantan za svaki $\mu < 0$.

²¹Procijep se ovdje zatvara zbog Paulijevog principa isključenja koji zabranjuje vezanje za $\mathbf{k}=0$.



Slika 3.5: Kinetička energija p+ip supravodiča bez spina. Vezanje otvara procijep osim za $\mu = 0$ kada se odvija fazni prijelaz između dvije faze.

Očekujemo da na ponašanje sustava za velike \mathbf{k} ne utječe fazni prijelaz koji uključuje samo male vrijednosti \mathbf{k} . Za $\mathbf{k} \rightarrow \infty$, $\tilde{\Delta}_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$ pa imamo $v_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$, $|u_{\mathbf{k}}| \rightarrow 1$ što osigurava da broj fermiona konvergira²²

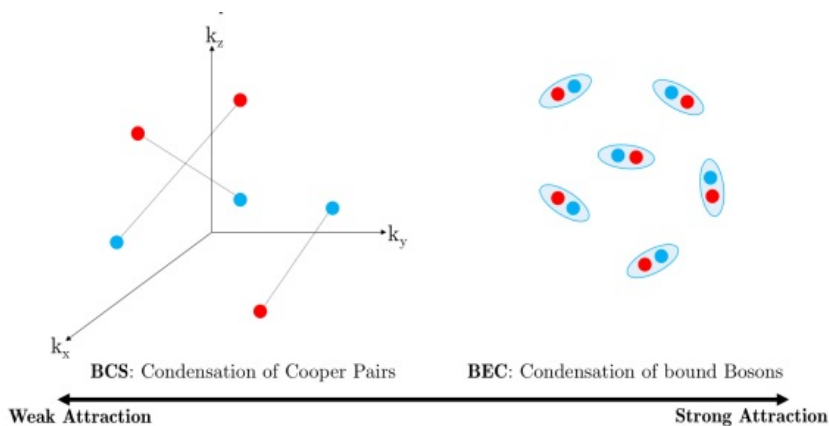
$$\langle c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \rangle = \bar{n}_{\mathbf{k}} = |v_{\mathbf{k}}|^2, \quad \bar{N} = \sum_{\mathbf{k}} \bar{n}_{\mathbf{k}} \quad (3.53)$$

Kao i u jednodimenzionalnom slučaju, razlog zašto $\mu < 0$ i $\mu > 0$ predstavljaju različite faze leži u topologiji, stoga je idući zadatak pronaći topološku invarijantu za 2D sustav. Nazivi "jaka" i "slaba" faza dolaze iz analize valne funkcije Cooperovog para u realnom prostoru ($g(\mathbf{r}) \equiv \varphi_{C.p.}(\mathbf{r})$) [20]:

$$|\varphi_{C.p.}(\mathbf{r})| \sim \begin{cases} e^{-|\mathbf{r}|/\zeta}, & \mu < 0 \quad (\text{jako vezanje}) \\ |\mathbf{r}|^{-1}, & \mu > 0 \quad (\text{slabo vezanje}) \end{cases} \quad (3.54)$$

Valna funkcija Cooperova para opada eksponencijalno za velike r kada je $\mu < 0$, a čak i kada ne, opada brže u odnosu na slučaj kada je $\mu > 0$. Drugim riječima, u jakoj fazi Cooperovi parovi su čvrsto vezani u realnom prostoru i ponašaju se kao diatomne molekule (Bose-Einsteinov kondenzat, "BEC"), a povećavanjem kemijskog potencijala vezanje slabi ("BCS" vezanje za $\mu < 0$). Prijelaz među fazama odvija se za $\mu = 0$ (BEC-BCS *crossover*).

²²Postupak je analogon onome u poglavlju 2.2.2.



Slika 3.6: Lijevo: vezanje fermiona u k-prostoru - Cooperovi parovi. Desno: vezanje fermiona u realnom prostoru - molekulske bozone.

3.3.1 Topološka invarijanta

Kao i u prošloj sekciji, uz pretpostavku da dodatne perturbacije hamiltonijana čuvaju translacijsku simetriju možemo pisati

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) = \mathbf{h}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.55)$$

gdje je $\mathbf{h}(\mathbf{k})$ glatka funkcija različita od nule za svaki \mathbf{k} , tako da postoji procijep na čitavom sustavu.

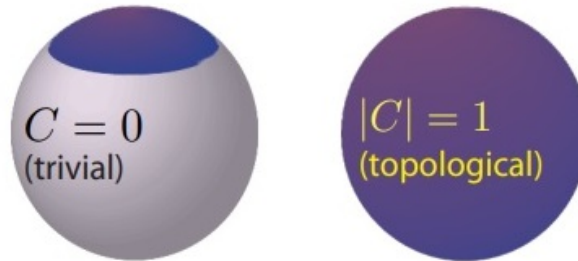
$$\begin{aligned} h_x(\mathbf{k}) &= -\Delta (k_x \sin(\varphi) + k_y \cos(\varphi)) \\ h_y(\mathbf{k}) &= \Delta (k_x \cos(\varphi) - k_y \sin(\varphi)) \\ h_z(\mathbf{k}) &= \frac{k^2}{2m} - \mu \end{aligned} \quad (3.56)$$

Opisujemo BCS stanje kao sferični domenski zid u pseudospinskom k-prostoru polumjera k_F . Zbog toga što $v_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$ kada $k \rightarrow \infty$ u bilo kojem smjeru, možemo dodati točku u beskonačnosti u k-prostoru koja je zapravo 2-sfera, sa svojom točkom u beskonačnosti u \mathcal{N} . $u_{\mathbf{k}}$ i $v_{\mathbf{k}}$ predstavljaju mapiranje iz \mathcal{S}^2 (k-prostora) u \mathcal{S}^2 (spinorni prostor), gdje se \mathcal{N} uvijek mapira u \mathcal{N} . Ovakva mapiranja se topološki klasificiraju u klase ekvivalencije, tako da se mape u istoj klasi mogu kontinuirano deformirati jedna u drugu. Posebna klasa mapiranja iz \mathcal{S}^n , $n = 1, 2, \dots$ u bilo koji prostor X definira grupu homotopija $\pi_n(X)$. U našem slučaju, grupa $\pi_2(\mathcal{S}^2) = \mathbb{Z}$ je grupa cijelih brojeva. Sada možemo definirati jedinični vektor $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{k})$. Uz pretpostavku da je on jedinstveno zadan (neovisno o smjeru \mathbf{k}) onda kada $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$ (čime osiguravamo da hamiltonijan nema beskonačne doprinose),

broj pokrivanja jedinične sfere definira tzv. Chernov broj

$$C = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi} \left[\hat{\mathbf{h}} \cdot \left(\partial_{k_x} \hat{\mathbf{h}} \times \partial_{k_y} \hat{\mathbf{h}} \right) \right] \quad (3.57)$$

gdje integrand mjeri kut koji $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{k})$ prebriše na jediničnoj sferi. Uzimajući integral preko svih vrijednosti \mathbf{k} dobivamo cijeli broj koji je invarijantan na deformacije $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{k})$ dokle god energijski procijep ostaje otvoren. Odnosno, Chernov broj se mijenja onda i samo onda kada se procijep zatvara, što znači da $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{k})$ nije dobro definiran u nekoj točki \mathbf{k} -prostora. Za fiksni \mathbf{k} , u slučaju kada je $\mu < 0$, $h(z)$ će uvijek biti pozitivan, a h_x i h_y opisuju kružnicu na jediničnoj sferi na visini dz . Za $k = 0$ počinjemo na sjevernom polu i pomičemo se prema ekvatoru, a zatim se za $k \rightarrow \infty$ ponovo vraćamo u sjeverni pol sfere, kao što je prikazano na slici (3.7 lijevo). Dakle, u topološki trivijalnoj (jako) fazi, vektor \mathbf{h} prvo "omotava" dio sfere S^2 , ali onda "odmotava" taj isti odsječak što rezultira s $C = 0$. Za $\mu > 0$, vektor $\hat{\mathbf{h}}$ je usmjeren prema južnom polu za $k = 0$ ($\hat{\mathbf{h}}(0) = -\hat{\mathbf{z}}$) i pomiče se prema sjevernom kako $k \rightarrow \infty$. U ovom slučaju Chernov broj iznosi -1.



Slika 3.7: Trivijalna i topološka faza kiralnog p+ip supravodiča. Osjenčeno ljubičastom bojom predstavlja dio sfere koji omotava vektor $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{k})$ kada $k \rightarrow \pm\infty$ za negativne i pozitivne vrijednosti kemijskog potencijala.

3.3.2 Majorana modovi

Kao i za Kitaev lanac, istražiti ćemo fizikalne posljedice neisčezavajuće vrijednosti topološke invarijante. Očekujemo nesporene modove na prijelazu topoloških faza. Modeliramo geometriju na disku prikazanom na slici ispod - kemijski potencijal sada ovisi o prostornoj udaljenosti r tako da je $\mu(\mathbf{r})$ glatka funkcija pozitivna unutar diska, a negativna izvan. Drugim riječima, topološki p+ip supravodič zauzima prostor unutar diska, dok izvan pretpostavljamo trivijalnu fazu. S obzirom da μ mijenja predznak prilikom prelaska među dvije faze, mora postojati domenski zid na rubu sustava gdje očekujemo rubna stanja. Kako nas interesiraju niskoenergetski modovi u blizini ruba, u hamiltonijanu (3.46) možemo zanemariti ∇^2 kinetički član. Prelaskom u polarne koordinate (r, ϑ) dobivamo (A.2)

$$H_{\text{rubni}} = \int d^2\mathbf{r} \left[-\mu(r)\psi^\dagger\psi + \left(\frac{\Delta}{2} e^{i\phi} e^{i\vartheta} \psi \left(\partial_r + \frac{i\partial_\theta}{r} \right) \psi + h.c. \right) \right] \quad (3.58)$$

Zbog faktora $e^{i\vartheta}$ vezuju se stanja s različitim angularnim momentom. Da pojednostavimo problem možemo odbaždariti ovaj faktor²³

$$\psi \rightarrow \psi = e^{-i\vartheta/2} \psi' \quad (3.59)$$

Važno je uočiti kako će $e^{-i\vartheta/2}$ za period 2π nositi faktor -1 koji moramo kompezirati kroz ψ' tako da tražimo rješenja s neperiodičnim rubnim uvjetima prilikom kruženja po disku. U terminima novih polja ψ' , definiramo dvokomponentni Nambu spinor

$$\Psi^\dagger(\mathbf{r}) = \left[\psi'^\dagger(\mathbf{r}), \psi'(\mathbf{r}) \right] \quad (3.60)$$

pa rubni hamiltonijan postaje

$$H_{\text{rubni}} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \mathcal{H}(\mathbf{r}) \Psi'(\mathbf{r}) \quad (3.61)$$

gdje je²⁴

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -\mu(r) & \Delta e^{-i\phi} \left(-\partial_r + \frac{i\partial_\theta}{r} \right) \\ \Delta e^{i\phi} \left(\partial_r + \frac{i\partial_\theta}{r} \right) & \mu(r) \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

²³Transformacija varijabli inducira dodatni član u derivaciji, $i\partial_\theta \rightarrow i\partial_\theta + \frac{1}{2}$, ali konstantu možemo zanemariti jer ionako isčezava u Fermi-Diracovoj statistici.

²⁴Operator impulsa $\hat{P} = i\nabla$ je hermitski pa slijedi $\nabla^\dagger = -\nabla$, odnosno $(\partial_r)^* = -\partial_r$; $(i\partial_\theta)^* = i\partial_\theta$.

Da bi pronašli svojstvene funkcije rubnih stanja koje zadovoljavaju $\mathcal{H}(r, \vartheta)\chi(r, \vartheta) = E\chi(r, \vartheta)$, parametrizirat ćemo ih sljedećim ansatzom

$$\chi_n(\mathbf{r}) = e^{in\theta} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}[f(r) + ig(r)] \\ e^{i\phi/2}[f(r) - ig(r)] \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

gdje je n polucjelobrojan orbitalni kvantni broj koji se brine za neperiodične rubne uvjete, a funkcije f i g moraju zadovoljavati sljedeće relacije (raspis je dan u (A.3))

$$\begin{aligned} (E + n\Delta/r)f &= -i(\mu(r) - \Delta\partial_r)g \\ (E - n\Delta/r)g &= i(\mu(r) + \Delta\partial_r)f \end{aligned} \quad (3.64)$$

Ako je $\chi(\mathbf{r}, \theta)$ dobro lokaliziran oko unutarnjeg/vanjskog ruba diska, možemo napraviti zamjenu $r \rightarrow R_{in/out}$. Da bi osigurali lokaliziranost (na vanjskom ili unutrašnjem rubu) slijedi da je u izrazu (3.64) $f = 0$ ili $g = 0$. Za $f = 0$ iz donje jednadžbe dobivamo

$$E_{out} = \frac{n\Delta}{R_{out}} \quad (3.65)$$

Za generički $\mu(r)$ imamo

$$(\mu(r) - \Delta\partial_r)g(r) = 0 \Rightarrow \mu(r)g(r) = \Delta \frac{\partial g(r)}{\partial r}$$

Što nakon integracije daje

$$\frac{1}{\Delta} \int_R^r \mu(r') dr' = \int_R^r \frac{\partial \ln g(r')}{\partial r} dr'$$

Konačno,

$$g(r) = g(R) e^{\frac{1}{\Delta}(\mu(r) - \mu(R))} \quad (3.66)$$

gdje vidimo kako $g(r)$ eksponencijalno opada udaljavanjem od ruba. Uvrštavanjem $R \rightarrow R_{out}$ dobivamo

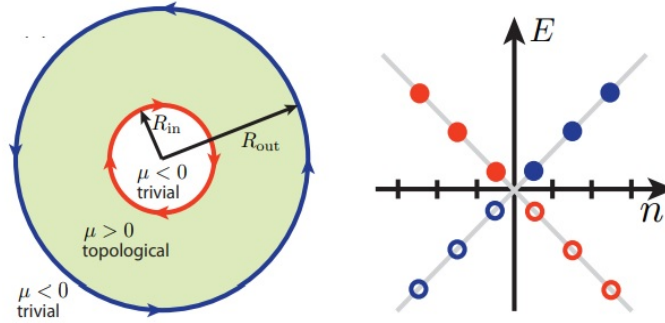
$$\chi_n^{out}(\mathbf{r}) = e^{in\theta} e^{\frac{1}{\Delta} \int_{R_{out}}^r dr' \mu(r')} \begin{pmatrix} ie^{-i\phi/2} \\ -ie^{i\phi/2} \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

Analognim postupkom za unutarnji rub, postavljajući $g = 0$ dobivamo

$$E_{\text{in}} = -\frac{n\Delta}{R_{\text{in}}} \quad (3.68)$$

$$\chi_n^{\text{in}}(\mathbf{r}) = e^{in\theta} e^{-\frac{1}{\Delta} \int_{R_{\text{in}}}^r dr' \mu(r')} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \\ e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

Ova rješenja imaju zanimljiva svojstva. Prvo, uvijek postoji konačan energijski procijep $\frac{\Delta}{2R_{\text{in/out}}}$, što je direktna posljedica polucjelobrojne vrijednosti n , odnosno anti-periodičnih rubnih uvjeta na $\Psi'(\mathbf{r})$. Drugo, rubna pobuđenja su kiralna i imaju suprotne kiralnosti na unutarnjem i vanjskom rubu - unutarnji modovi se propagiraju u smjeru suprotnom kazaljki na satu, dok se vanjski propagiraju u smjeru kazaljke (slika (3.8)). Ovo podsjeća na kvantni Hallov efekt [21], no postoji bitna razlika - rubna pobuđenja u Hallovom efektu su regularni kompleksni fermioni, dok su u našem slučaju to Majorana modovi koje ugrubo možemo promatrati kao polovicu Hallovih rubnih stanja. Ovakva kiralna rubna stanja su robustna na bilo kakve slabe perturbacije i ne oslanjaju se ni na koju specifičnu simetriju, već na topologiju sustava.



Slika 3.8: Lijevo: Geometrija za kiralne rubne Majorana modove. Desno: Energijski spektar za supravodič s geometrijom prikazanoj na slici lijevo. n ovdje poprima polucjelobrojne vrijednosti zbog anti-periodičnih rubnih uvjeta Majorana svojstvenih funkcija na rubovima diska.

Da bismo vidjeli da su rubna stanja uistinu Majorana modovi, proširit ćemo spinorno polje $\Psi'(\mathbf{r})$ u terminima *rubnih* operatora $\Gamma_n^{\text{in/out}}$

$$\Psi'(\mathbf{r}) = \sum_n \left[\chi_n^{\text{in}}(\mathbf{r}) \Gamma_n^{\text{in}} + \chi_n^{\text{out}}(\mathbf{r}) \Gamma_n^{\text{out}} \right] \quad (3.70)$$

S obzirom da su gornja i donja komponenta od $\Psi'(\mathbf{r})$ (3.60) povezane hermitskom konjugacijom, slijedi

$$\Gamma_n^{\text{in/out}} = \left(\Gamma_{-n}^{\text{in/out}} \right)^\dagger$$

Iz ovoga zaključujemo kako su samo stanja s $E \geq 0$ fizikalno različita (prikazano punim plavim/crvenim krugovima desno na slici (3.8)), te da pobuđenja opisana s operatorima

$$\Gamma^{\text{in/out}}(\theta) = \sum_n e^{in\theta} \Gamma_n^{\text{in/out}} = \left[\Gamma^{\text{in/out}}(\theta) \right]^\dagger \quad (3.71)$$

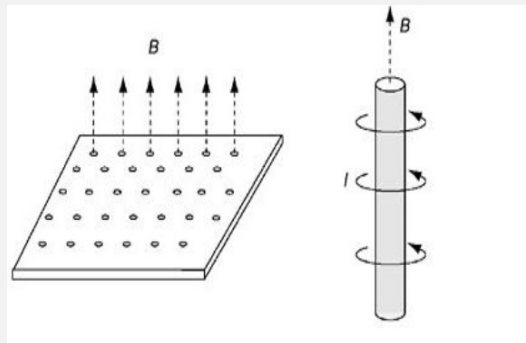
zadovoljavaju Majorana uvjet realnosti, odnosno opisuju Majorana fermione. Ako pogledamo desnu sliku (3.8) vidimo kako u ovakvoj konfiguraciji ne postoje Majorane u osnovnom stanju, tj. MZM-ovi. Ispostavlja se da se fizika sustava dramatično mijenja onda kada kvantni tok $\Phi = \frac{hc}{2e}$ probija kroz supravodič. Vrtlog koji se stvara na mjestu probijanja toka polja može se shvatiti kao rupa u (*bulk*) sustavu.

3.3.3 *Intermezzo* - kvantni vrtlozi

Supravodiče prema ponašanju u magnetskom polju dijelimo na dvije vrste
tip I - ima jedinstveno definiranu kritičnu vrijednost polja, H_c , nakon koje gubi supravodljiva svojstva.

tip II - ima dvije definirane vrijednosti polja između kojih je dozvoljena djelomična penetracija polja u izoliranim točkama prostora. Ove točke nazivamo vrtlozima.

Tamo gdje se pojavi vrtlog, parametar reda, $\Psi(\mathbf{r}, t)$, ima vrijednost nula, odnosno, u tom području metal nema supravodljiva svojstva. Oko vrtloga se inducira struja kako prikazuje sljedeća slika.



Slika 3.9: Prodiranje magnetnog polja kroz supravodič tipa II. Krugovi predstavljaju kvantne vrtloge oko kojih se inducira struja, kako je prikazano na desnoj slici.

S obzirom da se svaka kompleksna funkcija može napisati kao

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 e^{i\theta} \quad (3.72)$$

U supravodičima netrivialne topologije (prstenasti), faza se kontinuirano mijenja od θ_0 do $\theta_0 + 2k\pi$ prilikom kruženja oko prstena. U tom slučaju ćemo imati k magnetskih tokova zarobljenih unutar šupljine. Prema minimalnom vezanju, struja vjerojatnosti Cooperovih parova je

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2m} [\Psi^*(-i\hbar\nabla)\Psi - \Psi(-i\hbar\nabla)\Psi^* - 2q\mathbf{A}|\Psi|^2] \quad (3.73)$$

gdje je $\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})}e^{i\theta(\mathbf{r})}$ Ginzburg-Landau parametar reda, ρ je lokalna gustoća supravodljivih elektrona za koju uzimamo da je konstantna.

Uvrštavajući u izraz za struju vjerojatnosti dobivamo

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{m} \left(\nabla\theta - \frac{q}{\hbar}\mathbf{A} \right) \rho \quad (3.74)$$

Unutar supravodiča gustoća struje je nula, $\mathbf{J} = 0$, pa imamo

$$\nabla\theta = \frac{q}{\hbar}\mathbf{A} \quad (3.75)$$

Koristimo Stokesov teorem, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, te integriramo po zatvorenoj petlji

$$\Phi_B = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{q} \oint \nabla\theta \cdot d\mathbf{l} \quad (3.76)$$

Kako se parametar reda mora vratiti u istu vrijednost nakon integracije po zatvorenoj petlji slijedi

$$\Phi_B = \frac{\hbar}{q} 2c\pi = \frac{hc}{2e} \quad (3.77)$$

Zbog Meissnerovog efekta, unutar supravodiča je $\mathbf{B} = 0$. Točnije, magnetsko polje prodire u supravodič na malim udaljenostima (tzv. *Londonova duljina* $\lambda_L \approx 100nm$), no struja zasjenjenja (*screening*) stvara magnetsko polje \mathbf{M} koje poništava vanjsko polje \mathbf{B} koje prodire unutra.

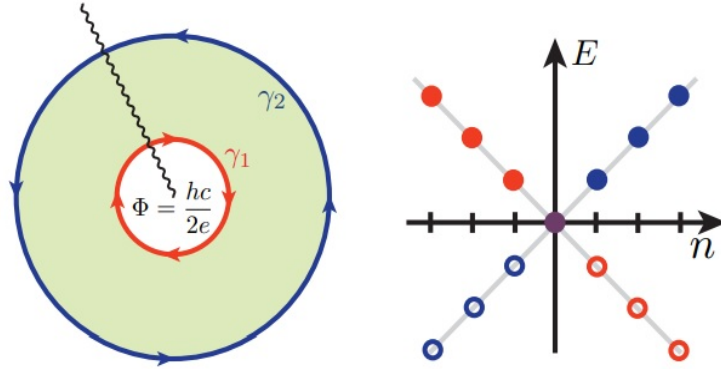
Prodiranje magnetskog toka kroz sredinu supravodiča prikazanog lijevo na slici (3.8) inducira vrtlog tako da, na primjer,

$$\Delta \rightarrow \Delta e^{-i\theta} \quad (3.78)$$

u izrazu (3.58). Ono što odmah možemo uočiti jest da će ovaj faktor "progutati" $e^{i\theta}$. Ovo nam omogućava da napišemo rješenja u terminima originalnog polja Ψ , umjesto Ψ' , koje zadovoljava periodične rubne uvjete. Hamiltonijan je zadan sa

$$H_{rubni}^v = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \mathcal{H}(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) \quad (3.79)$$

gdje je \mathcal{H} zadan sa (3.62). Rubni hamiltonijan ima istu formu sa i bez kvantnih vrtloga. Bitna razlika među njima jest da spinorno polje zadovoljava periodične uvjete kad magnetski tok prodire kroz sredinu sustava, što znači da će n u (3.67) i (3.69) biti cjelobrojan, $n \in \mathbb{Z}$. Za $n = 0$ imat ćemo stanja na energiji nula ((3.65),(3.68)), što odgovara MZM-ovima na rubovima Kitaeva lanca, o kojem smo raspravljali u prošlom dijelu. Dakle, dva Majorana moda će se pojaviti lokalizirani na svakom rubu diska (slika (3.10)), što nas ponovo vodi na degeneraciju osnovnog stanja za $p+ip$ supravodič.

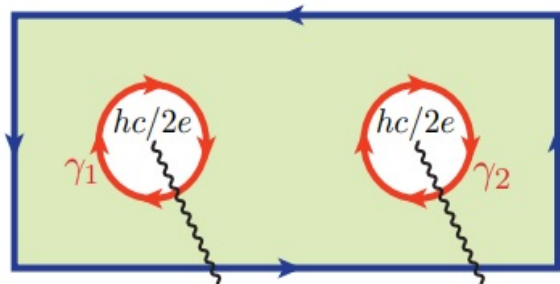


Slika 3.10: Lijevo: Tok magnetskog polja koji probija kroz sredinu trivijalne topološke faze. Valovita linija prikazuje *branch cut*. Prilikom prolaska preko nje, Majorana rubna stanja promijene predznak. Desno: Energijski spektar za $p+ip$ supravodič kroz koji probija kvantizirani tok magnetskog polja. Ljubičasti krug predstavlja MZM.

Pomak u rubnim uvjetima, koje naposljetku dovode do formiranja MZM-ova na rubovima, intuitivno se može shvatiti na sljedeći način: baždarna transformacija $\psi \rightarrow \psi e^{i\delta\phi/2}$ ekvivalentna je promjeni supravodljive faze u Δ za $\delta\phi$. To znači da promjena faze za $\delta\phi = 2\pi$, iako ne utječe na formiranje Cooperovih parova, vodi na promjenu predznaka za nesparene fermione, kao što su to rubni operatori $\Gamma_n^{in/out}$. Zbog promjene u predznaku prilikom rotacije za 2π uvodimo tzv. *branch-cuts* (slika (3.10) lijevo). Kada Majorana

fermion prođe preko nje dobije negativan predznak koji promjeni inicijalno neperiodične rubne uvjete u periodične.

Navedena analiza očito vrijedi za neparan broj vrtloga. Ako je tok u vrtlogu parni višekratnik od $hc/2e$, n će ponovo biti polucjelobrojan, a za posljedicu nećemo imati MZM-ove na vanjskom rubu. Da bude jasnije, možemo promotriti konfiguraciju s dva vrtloga prikazanoj na slici ispod. U slučaju supravodiča tipa II, kada magnetski tok prodre u sustav,



Slika 3.11: Konfiguracija s dva vrtloga. Svaki podržava jedan MZM oko točke proboja toka polja (periodični rubni uvjeti). Vanjski rub ima neperiodične rubne uvjete i ne podržava MZM-ove, već ima konačan energijski procijep.

jezgra vrtloga je reda veličine duljine koherencije ($\xi \sim \frac{v_F}{k_F \Delta}$), i tvori topološki trivijalno područje, gdje je $k_F \Delta$ energijski procijep zatvorenog sustava (*bulk system*), a v_F je Fermijeva brzina. Prema (3.68), slijedi

$$|E_{\text{vortex}}| \sim \frac{|n|\Delta}{\xi} \sim \frac{|n|(k_F \Delta)^2}{E_F} \quad (3.80)$$

S obzirom da je ovdje $n \in \mathbb{Z}$, vrtlog veže jedan MZM. Ono što valja uočiti jest da je ovaj MZM odvojen 'mini procijepom' od idućeg pobuđenog stanja, $n = 1$

$$|E_{\text{mini procijep}}| \sim \frac{(k_F \Delta)^2}{E_F} \quad (3.81)$$

U tipičnim supravodičima veličina mini procijepa je često i do nekoliko tisuća puta manja od procijepa sustava što čini fizikalne realizacije kompliciranim, no implikacije ovakvih sustava na budućnost kvantnih računala su ogromne stoga ćemo se u nastavku pozabaviti tom tematikom. Drugim riječima, potpuno fermionsko stanje s dobro definiranim okupacijskim brojem, čiji fermionski operator možemo konstruirati kombiniranjem MZM-ova u vrtlozima

$$f_j = \frac{1}{2} (\gamma_1 + i\gamma_2) \quad (3.82)$$

reprezentira "normalni" fermion $f^\dagger \neq f$, koji zadovoljava standardne antikomutacijske relacije (2.8). S obzirom da Majorane reprezentirane s $\gamma_{1,2}$ mogu biti na proizvoljnoj međusobnoj udaljenosti, operator f je netrivialan, u smislu da "kodira" visoko nelokalno sprezanje. Ovakvo stanje može se puniti (ili prazniti), bez utroška energije što nas dovodi do degeneracije osnovnog stanja koja je temelj kvantnih računala.

Na kraju ovog poglavlja, bitno je spomenuti (iako se u ovom radu direktno ne bavimo time) da osim promatranog *spinless* (singletnog) p+ip supravodiča, također se može pokazati da i spinski (tripletni) p+ip supravodič također podržava izolirane MZM-ove [18],[20],[23].

4 Fizikalne implementacije

Nova fizika i tehnološki napredak koji obećavaju MZM-ovi doživjela je procvat u posljednjih petnaestak godina. Istraženi su mnogi načini kako realizirati topološke faze koje mogu realizirati MZM-ove ([26]-[32]) nalik onima koje smo obradili u prošlom poglavlju. Najveću prepreku predstavlja Kramerova degeneracija - potreban je mehanizam koji "zamrzava" jednu komponentu spina²⁵. Ovaj problem automatski dovodi do iduće prepreke - efektivni *spinless* model ima za posljedicu da supravodljivi parametar uređenja, Δ , mora biti neparan u paritetu, što znači da materijal koji se koristi mora podržavati vezanje p-tipa. Supravodiči p-tipa ne samo da su rijetki u prirodi, već ako ih i pronađemo pružaju (u najboljem slučaju) *power-law* korelacije Cooperovih parova, u kontrastu s dalekosežnom supravodljivošću koju pretpostavljaju modeli iz prošlog poglavlja. Ovaj drugi problem se ipak rješava "sam od sebe" jer se ispostavlja da je *power-law* korelacija dovoljna za stabilizaciju Majorana modova. Dakle, ostaje nam problem Kramerove degeneracije. Pionirski rad, koji rješava spomenuti problem, nastao je 2007., a naziva se, prema autorima, Fu-Kane model [30]. Osim što je najslavniji primjer, potpuno je revolucionaran - umjesto supravodiča p-tipa koristi se uobičajeni supravodič s-tipa (kao u originalnoj BCS teoriji) i rubna stanja topoloških izolatora. Mnogi su autori naslijedili ideju, a ona počiva, skoro u potpunosti, na tzv. *proximity effects* - sustav može naslijediti Cooperove parove od obližnjeg supravodiča. Fluktuacije induciranog parametra reda primarno kontrolira supravodič (engl. *parent bulk superconductor*) pa ih možemo zanemariti na konačnim temperaturama. Općenito, sve predložene fizikalne realizacije imaju tri glavna sastojka

- 1) efekti blizine (*proximity effects*)
- 2) lom T-simetrije
- 3) spin-orbita vezanje

U nastavku, slikovito rečeno, promatramo na koji način treba složiti već dostupne lego kockice da bi konstruirali sustave za koje postoji mogućnost eksperimentalne detekcije Majorana fermiona.

²⁵koji lomi T-simetriju.

4.1 1D supravodiči p-tipa

Promatramo 1D sustav zadan hamiltonijanom

$$H_{1D} = \int \frac{dk}{2\pi} \psi_k^\dagger \mathcal{H}_k \psi_k \quad (4.1)$$

i konvencionalni supravodič s-tipa

$$H_{SC} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\epsilon_{sc}(k) \eta_{\mathbf{k}}^\dagger \eta_{\mathbf{k}} + \Delta_{sc} (\eta_{\uparrow\mathbf{k}} \eta_{\downarrow-\mathbf{k}} + h.c.) \right] \quad (4.2)$$

gdje $\psi_{\sigma k}^\dagger, \eta_{\sigma\mathbf{k}}^\dagger$ stvaraju elektrone spina σ za 1D sustav i supravodič, respektivno. Standardno, $\epsilon_{sc}(k)$ i Δ_{sc} označavaju kinetičku energiju te amplitudu vezanja supravodiča. Ako dovedemo u neposrednu blizinu 1D sustav i supravodič, elektroni mogu tunelirati između dva podsustava amplitudom Γ , što možemo opisati hamiltonijanom sljedećeg oblika

$$H_\Gamma = -\Gamma \int dx \left[\psi_x^\dagger \eta_{(x,0,0)} + h.c. \right] \quad (4.3)$$

gdje smo uzeli da 1D sustav leži duž x-osi, $(x, y, z) = (x, 0, 0)$. Hamiltonijan cjelokupnog sustava će se sastojati od navedena tri doprinosa

$$H = H_{1D} + H_{SC} + H_\Gamma \quad (4.4)$$

Hibridizacijski efekti (H_Γ) mogu se odrediti dimenzionalnom analizom ili, rigoroznije, perturbativnim postupkom. Ako pretpostavimo $k_F^{Sc} \gg k_F^{1D}$, tada će hibridizacija među podsystemima biti kontrolirana amplitudom tuneliranja pojedinog elektrona (Γ) i svojstvima supravodiča. Kada vrijedi $\Gamma k_F^{Sc} \ll \Delta_{SC}$, tuneliranje je jako potisnuto zbog energijskog procijepa supravodiča pa u tom slučaju možemo koristiti perturbativni račun. Ako želimo bolje razumjeti fiziku iza efekta blizine (a želimo), umjesto dimenzionalne analize krenut ćemo rigoroznijim putem s ciljem da pronađemo efektivni hamiltonijan za 1D sustav, koji uključuje Cooperovo vezanje inducirano blizinom (engl. *proximity-induced pairing*). Postupak se sastoji od konstrukcije euklidske akcije koja odgovara hamiltonijanu (4.4), a zatim treba prointegrirati po stupnjevima slobode *bulk* (3D) supravodiča.

4.1.1 Efektivna akcija

Unitarna transformacija koja dijagonalizira H_{SC} glasi

$$\begin{aligned}\eta_{\uparrow\mathbf{k}} &= -u_k\chi_{1\mathbf{k}} + v_k\chi_{2-\mathbf{k}}^\dagger \\ \eta_{\downarrow\mathbf{k}} &= v_k\chi_{1-\mathbf{k}}^\dagger + u_k\chi_{2\mathbf{k}} \\ u_k &= \frac{\Delta_{sc}}{\sqrt{2E_k(E_k - \epsilon_k)}}, v_k = \frac{\Delta_{sc}}{\sqrt{2E_k(E_k + \epsilon_k)}}\end{aligned}\quad (4.5)$$

gdje je $E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}$. U ovoj bazi, ukupni hamiltonijan sustava glasi

$$\begin{aligned}H &= \int \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \psi_{\mathbf{k}}^\dagger \mathcal{H}_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}} + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} E_k \left[\chi_{1\mathbf{k}}^\dagger \chi_{1\mathbf{k}} + \chi_{2\mathbf{k}}^\dagger \chi_{2\mathbf{k}} \right] \\ &\quad - \Gamma \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\chi_{1\mathbf{k}} \left(u_k \psi_{\uparrow\mathbf{k}_d}^\dagger + v_k \psi_{\downarrow-\mathbf{k}_d} \right) + \chi_{2\mathbf{k}} \left(v_k \psi_{\uparrow-\mathbf{k}_d} - u_k \psi_{\downarrow\mathbf{k}_d}^\dagger \right) + h.c. \right]\end{aligned}\quad (4.6)$$

gdje smo model poopćili tako da uključuje d-dimensionalni podsustav (d=1 ili 2). Stupnjevi slobode koje imamo su

$$\psi_k, \psi_k^\dagger, \chi_{1,k}, \chi_{2,k}, \chi_{1,k}^\dagger, \chi_{2,k}^\dagger \quad (4.7)$$

Uvodimo vektorsku notaciju:

$$\begin{aligned}\chi^\dagger &= \left(\chi_{1,k}^\dagger, \chi_{2,k}^\dagger \right), \quad \pi_{1k} = \Gamma \left(u_k \psi_{\uparrow k_d}^\dagger + v_k \psi_{\downarrow -k_d} \right), \quad \pi = (\pi_{1k}, \pi_{2k}) \\ \chi &= \left(\chi_{1,k}, \chi_{2,k} \right)^T, \quad \pi_{2k} = \Gamma \left(v_k \psi_{\uparrow -k_d} - u_k \psi_{\downarrow k_d}^\dagger \right)\end{aligned}$$

Lagrangian sustava opisanog hamiltonijanom (4.6) je

$$\begin{aligned}L &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (p\dot{q} - \mathcal{H}) \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (\psi_k^\dagger \dot{\psi}_k - \psi_k^\dagger \mathcal{H}_k \psi_k) \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \chi_k^\dagger A(k) \chi_k + \pi \chi + \chi^\dagger \pi^\dagger\end{aligned}\quad (4.8)$$

pa će akcija biti

$$\begin{aligned}
 S &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_k}{2\pi} \left(\psi_k^\dagger \omega_k \psi_k - \psi_k^\dagger \mathcal{H}_k \psi_k \right) + S_\chi = S_0 + S_\chi \\
 S_\chi &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_k}{2\pi} \left(\chi^\dagger A \chi + \pi \chi + \chi^\dagger \pi^\dagger \right)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Matrica A zadana je sa

$$A(k, q) = - \begin{pmatrix} E_k - i\omega_k & 0 \\ 0 & E_k - i\omega_k \end{pmatrix} \delta^d(k - q) = -a \delta^d(k - q) \tag{4.10}$$

gdje smo član $\dot{\chi}$ "utrpali" u matricu A na način $\dot{\chi} = i\omega\chi$.

Radi se o euklidskoj teoriji pa je $itS \rightarrow -tS_E$. Efektivna akcija d-dimenzionalnog pod-sustava je dana s

$$e^{iS_E} = \int D\psi_k D\psi_k^\dagger D\chi_{1,k}^\dagger D\chi_{2,k}^\dagger D\chi_{1,k} D\chi_{2,k} e^{iS} \tag{4.11}$$

gdje je $S \propto p\dot{q} - H$, uz sume i integracije. Dakle, efektivna akcija će biti ono što piše u eksponentu od rezultata integracije. Želimo napisati S u sljedećem obliku

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_k}{2\pi} \chi^\dagger \cdot B \cdot \chi$$

gdje je B matrica iz (A.19). Da bi (4.9) mogli napisati kao Gaussov integral, treba nam kvadratni oblik (Zee, *QFT in a Nutshell* [24], p.128).

$$\bar{\psi} K \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta = (\bar{\psi} + \bar{\eta} K^{-1}) K (\psi + K^{-1} \eta) - \bar{\eta} K^{-1} \eta$$

Primjenom formule dobivamo

$$\left(\chi^\dagger A \chi + \pi \chi + \chi^\dagger \pi^\dagger \right) = (\chi^\dagger + \pi A^{-1}) A (\chi + A^{-1} \pi^\dagger) - \pi A^{-1} \pi^\dagger \tag{4.12}$$

gdje je $B = \pi A^{-1} \pi^\dagger$. Matrice A i B ne ovisi o χ pa ispadaju iz integracije. Imamo

$$\int D\psi_k D\psi_k^\dagger e^{-S_0 + \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_k}{2\pi} \pi A^{-1} \pi^\dagger} \int D\chi_{1,k}^\dagger D\chi_{2,k}^\dagger D\chi_{1,k} D\chi_{2,k} e^{\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_k}{2\pi} (\chi^\dagger + \pi A^{-1}) A(k, \omega) (\chi + A^{-1} \pi^\dagger)} \tag{4.13}$$

Ako napravimo sljedeću zamjenu varijabli

$$\bar{\theta} = \chi^\dagger + \pi A^{-1}, \quad \theta = \chi + A^{-1} \pi^\dagger \quad (4.14)$$

i iskoristimo pravilo za konvoluciju Fourierovog transformata (A.4), čime za drugi integral dobivamo ($\omega_k \equiv \omega_1$)

$$\int D\bar{\theta} D\theta e^{\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_2}{2\pi} \bar{\theta}(k, \omega_1) A(k, \omega_1, q, \omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) \delta^d(k - q) \theta(q, \omega_2)} = \det A \quad (4.15)$$

Particijski funkcional zadan je sa

$$Z_0 = \det(A(k, \omega_1) \delta^d(k - q) \delta(\omega_1 + \omega_2)) = \det \left(\begin{pmatrix} E_k - i\omega & 0 \\ 0 & E_k - i\omega \end{pmatrix} \delta(\omega_1 + \omega_2) \delta^d(k - q) \right) \quad (4.16)$$

Z_0 ne figurira jer nema polja u sebi pa se Z normalizira tako da je $Z_0 = 1$. Efektivna akcija sada glasi

$$S_{eff} = -\ln \left[e^{-S_0 + \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_k}{2\pi} \pi A^{-1} \pi^\dagger} \right] \quad (4.17)$$

Rješavamo integral

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_1}{2\pi} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_2}{2\pi} \left(\pi(k, \omega_1) A^{-1}(k, q, \omega_1, \omega_2) \pi^\dagger(q, \omega_2) \right) \quad (4.18)$$

za koji tražimo inverz matrice A iz uvjeta unitarnosti $AA^{-1} = \mathbb{I}$. Uvodimo dva nova nijema indeksa za kontrakciju

$$\int \frac{d^d z}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_3}{2\pi} A^{-1}(k, \omega_1, z, \omega_3) A(k, \omega_1, z, \omega_3) \delta(\omega_3 - \omega_2) \delta^d(z - q) = \delta^d(k - q) \delta(\omega_1 + \omega_2) \mathbb{I} \quad (4.19)$$

Uvodimo ansatz

$$A^{-1}(k, z) = - \begin{pmatrix} \frac{1}{E_z - i\omega_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_z - i\omega_3} \end{pmatrix} f(k, z, \omega_1, \omega_3) = -a^{-1} f(k, z, \omega_1, \omega_3) \quad (4.20)$$

pa imamo

$$\int \frac{d^d z}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_3}{2\pi} a^{-1} a f(k, z, \omega_1, \omega_3) \delta(\omega_3 - \omega_2) \delta^d(z - q) = \delta^d(k - q) \delta(\omega_1 + \omega_2) \mathbb{I} \quad (4.21)$$

$a^{-1}a$ s lijeva pokrati se s matricom \mathbb{I} s desna, a kako integriramo samo delta funkcije, slijedi

$$\frac{1}{(2\pi)^{d+1}} f(k, q, \omega_1, -\omega_2) = \delta^d(k - q) \delta(\omega_1 + \omega_2) \quad (4.22)$$

Uvrštavanjem u (4.18) dobivamo

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_1}{2\pi} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_2}{2\pi} \left(\pi(k, \omega_1) A^{-1}(k, q, \omega_1, \omega_2) \pi^\dagger(q, \omega_2) \right) \\ &= - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_1}{2\pi} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_2}{2\pi} \left(\pi(k, \omega_1) a^{-1}(k, q, \omega_1, \omega_2) (2\pi)^{d+1} \delta^d(k - q) \delta(\omega_1 + \omega_2) \pi^\dagger(q, \omega_2) \right) \\ &= - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega_1}{2\pi} \left(\pi(k, \omega_1) a^{-1}(k, \omega_1) \pi^\dagger(k, -\omega_1) \right) \\ &= - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\frac{\pi_{1k}(\omega) \pi_{1k}^\dagger(-\omega) + \pi_{2k}(\omega) \pi_{2k}^\dagger(-\omega)}{E_k - i\omega} \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nakon množenja brojnika i sređivanja izraza dobije se

$$\delta S = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[\Delta_{sc} \lambda(\mathbf{k}, \omega) [\psi_{\uparrow(\mathbf{k}, \omega)}^\dagger \psi_{\downarrow(-\mathbf{k}, -\omega)} + h.c.] + [-i\omega \lambda(\mathbf{k}, \omega) - \delta\mu(\mathbf{k}, \omega)] \psi_{(\mathbf{k}, \omega)}^\dagger \psi_{(\mathbf{k}, \omega)} \right] \quad (4.24)$$

pri čemu smo uveli pokratu

$$\lambda(\mathbf{k}, \omega) = \int_k \frac{\Gamma^2}{\omega^2 + \Delta^2 + \epsilon_{\mathbf{k}}^2} \quad (4.25)$$

Efektivna akcija glasi

$$S_{eff} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \psi_{(\mathbf{k}, \omega)} \mathcal{H}_{\mathbf{k}} \psi_{(\mathbf{k}, \omega)} + \delta S \quad (4.26)$$

Iz izraza (4.24) se vidi kako supravodič renormalizira kemijski potencijal (u ovisnosti o impulsu i u režimu niskih frekvencija) kroz član $\delta\mu(\mathbf{k}, \omega)$, no ta nam korekcija ne figurira pa je možemo zanemariti. Ono što nas zanima je hibridizacija koja je sadržana u funkciji $\lambda(\mathbf{k}, \omega)$. Za jednodimenzionalni model, $d=1$ u (4.25), dobivamo

$$\lambda(k_x, \omega) = \int_{k_y, k_z} \frac{\Gamma^2}{\omega^2 + \Delta^2 + \left[\frac{k_y^2 + k_z^2}{2m_{sc}} + \left(\frac{k_x^2}{2m_{sc}} - \mu_{sc} \right) \right]^2} \quad (4.27)$$

Generalno, zanimaju nas jednodimenzionalni sustavi niske gustoće, tako da vrijedi $k_x^2/2m_{sc} \ll \mu_{sc}$, za relevantne vrijednosti k_x . U tom slučaju, ovisnost $\lambda(\mathbf{k}, \omega)$ o k_x možemo zanemariti. Sljedeća pretpostavka je da vrijedi $\mu_{sc} \gg \sqrt{\omega^2 + \Delta_{sc}^2}$, za relevantne frekvencije, što značajno pojednostavljuje funkciju λ kada je razvijemo u red

$$\lambda(\omega) = \frac{\pi \rho_{2D} \Gamma^2}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_{sc}^2}} \quad (4.28)$$

gdje je $\rho_{2D} = \frac{m_{sc}}{2\pi}$ gustoća stanja za 2D sustav, s efektivnom masom m_{sc} . Ako definiramo kvazičestičnu težinu

$$Z(\omega) = (1 + \lambda)^{-1} \quad (4.29)$$

akciju možemo zapisati u sljedećem obliku

$$S_{\text{eff}} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} Z^{-1}(\omega) \left\{ \psi_{(\mathbf{k}, \omega)}^\dagger [-i\omega + Z(\omega) \mathcal{H}_{\mathbf{k}}] \psi_{(\mathbf{k}, \omega)} + \Delta_{sc} [1 - Z(\omega)] [\psi_{\uparrow(\mathbf{k}, \omega)} \psi_{\downarrow(-\mathbf{k}, -\omega)} + h.c.] \right\} \quad (4.30)$$

Ono što je bitno uočiti, a to je i sama poanta konstrukcije efektivne akcije, jest da se Cooperovo vezanje ponovo pojavljuje, sada ovisno o frekvenciji. Osim toga, tuneliranje generira i kvazičestičnu težinu $Z(\omega)$, za elektrone u 1D sustavu. Ono što nam govori efektivna akcija (4.30) jest da povećanjem amplitude tuneliranja Γ , valne funkcije elektrona u 1D sustavu "prodiru" dublje u supravodič i time reduciraju kvazičestičnu težinu i povećavaju amplitudu vezanja parova, koje su naslijedili od supravodiča. Amplituda vezanja doseže maksimum (Δ_{sc}) kada $Z(\omega) \rightarrow 0$. Reducirana kvazičestična težina efektivno reskalira originalni hamiltonijan. Drugim riječima, spin-orbita vezanje, Zeemanovo cijepanje itd. nemaju vrijednosti koje bi mjerili u odsustvu supravodiča, već se renormaliziraju na manje vrijednosti zbog hibridizacije. Ovaj aspekt efekta blizine se može zanemariti na ovom nivou, no posljedice su vidljive kada se vezanje tretira još sofisticiranije i konzistentnije [25].

4.2 2D supravodiči p-tipa

Zbog opsega rada te zbog same činjenice da su "sastojci" isti kao za 1D model, nećemo konstruirati efektivnu akciju već tvrdimo da se efekti blizine tretiraju kao i u 1D modelu, s trivijalnim modifikacijama [18]. Preskaćemo na konkretan primjer i promatramo Fu-Kane model u kojem se supravodljivost p-tipa inducira na rubovima topoloških izolatora. Na 3D topološkim izolatorima inducirat će se $p + ip$ vezanje, a na 2D topološkim izolatorima dobivamo ekvivalent Kitaeva lanca. Poštovat ćemo dosadašnji redoslijed od nižih prema višim dimenzijama i detaljno razmotriti 1D model te povući paralelu za 2D (Fu-Kane 2007.). Za neke od drugačijih načina konstrukcije sustava koji podržavaju Majorane (kao npr. ugljikove nanocjevčice, Ge/Si nanožice itd.) pogledati [28], [29], [32].

4.3 Fu-Kane model

Topološki izolator je materijal koji se ponaša kao izolator u unutrašnjosti, a na površini postoje rubna stanja međusobno povezana T-simetrijom. U 2D sustavima ovo je istovjetno elektronskom plinu u jakom magnetskom polju koje uzrokuje energijski procijep unutar sustava i vodljivost na rubovima. Dokle god je T simetrija očuvana, raspršenje između Kramerovih partnera je potisnuto što znači da postoji simetrijom zaštićena topološka faza s kvantiziranom vodljivošću (kvantni spinski Hallov efekt). Razlika među 2D i 3D modelima leži u \mathbb{Z}_2 topološkoj invarijanti koja definira osnovno stanje. U 2D topološkim izolatorima postoji jedna invarijanta koja razlikuje izolator od kvantne spinske Hallove faze [21], a u 3D modelima postoje četiri invarijante koje razlikuju izolator od jake i slabe topološke faze. Ako je kemijski potencijal unutar energijskog procijepa između vodljivog i valentnog pojasa²⁶, jedini relevantni stupnjevi slobode su par suprotno propagirajućih rubnih stanja u savršenom tzv. zaključavanju spina i impulsa (engl. *spin-momentum locking*) - spin i impuls su ortogonalni. To je posljedica jakog spin-orbita vezanja - interakcije magnetskog dipolnog momenta elektrona, njegovog angularnog momenta i elektrostatskog polja pozitivnih jezgara. Ova stanja možemo onda gledati kao 1D sustave s neparnim brojem Fermijevih točaka na jednoj polovici Brillouinove zone. U tom smislu, sustav se ponaša kao da nema spin. Očekujemo da efektom blizine na rubovima 2D izolatora induciramo 1D supravodljivost.

²⁶Dokle god Fermijev nivo ne presijeca vodljivi/valentni pojas, spektar ima jedan par Fermijevih točaka.

Rubna stanja možemo opisati jednodimenzionalnim Blochovim hamiltonijanom

$$H_{2DTI} = \int dx \psi^\dagger (-iv\partial_x \sigma^z - \mu) \psi \quad (4.31)$$

gdje je v brzina rubnih stanja, μ kemijski potencijal, a ψ^\dagger stvara česticu na poziciji x , s definiranim spinom. Induciranjem supravodljivosti, rubni hamiltonijan se mijenja u

$$\begin{aligned} H &= H_{2DTI} + H_\Delta \\ H_\Delta &= \int dx \Delta (\psi_\uparrow \psi_\downarrow + h.c.) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Kao i do sada, rješavanjem jednadžbe svojstvenih vrijednosti dobivamo energije kvazičestica

$$E_\pm = \sqrt{(\pm vk - \mu)^2 + \Delta^2} \quad (4.33)$$

Dakle, hamiltonijan zadan sa (4.32) opisuje topološki supravodič ekvivalentan Kitaevom hamiltonijanu, no sa zadovoljenom T-simetrijom. Osim toga, postoji jedna suptilna, ali važna razlika između ovog sustava i idealiziranog Kitaeva modela. Kako 1D supravodljivost inducujemo na 2D plohi koja nema rubova, Majorane u topološkoj fazi ne možemo lokalizirati. Kako bi to učinili, osim supravodiča, na sustav treba "nalijepiti" i magnetski izolator koji također omogućava lom T-simetrije koja je potrebna da bi imali nesparene MZM-ove. Uvodimo Zeemanovo polje koje odmiče spin od z-osi

$$H_Z = -h \int dx \psi^\dagger \sigma^x \psi \quad (4.34)$$

pa hamiltonijan glasi

$$H' = H_{2DTI} + H_Z + H_\Delta \quad (4.35)$$

Svojstvena stanja energije su

$$\epsilon_\pm(k) = -\mu \pm \sqrt{(vk)^2 + (\Delta + h)^2} \quad (4.36)$$

Kada je $\Delta = 0$, spektar postaje

$$\epsilon_\pm(k) = -\mu \pm \sqrt{(vk)^2 + h^2} \quad (4.37)$$

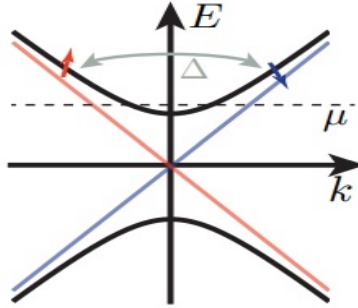
i ima energijski procijep za $k = 0$ zahvaljujući lomu T-simetrije (slika 4.1). Da bi otkrili fiziku sustava prelazimo u bazu²⁷ koja dijagonalizira kinetičku energiju

$$\begin{aligned}
 H' = \int \frac{dk}{2\pi} \left\{ \epsilon_+(k)\psi_+^\dagger(k)\psi_+(k) + \epsilon_-(k)\psi_-^\dagger(k)\psi_-(k) \right. \\
 + \frac{\Delta_p(k)}{2} [\psi_+(-k)\psi_+(k) + \psi_-(-k)\psi_-(k) + h.c.] \\
 \left. + \Delta_s(k) [\psi_-(-k)\psi_+(k) + h.c.] \right\}
 \end{aligned} \quad (4.38)$$

gdje je

$$\Delta_p(k) = \frac{vk\Delta}{\sqrt{(vk)^2 + h^2}}, \quad \Delta_s(k) = \frac{h\Delta}{\sqrt{(vk)^2 + h^2}} \quad (4.39)$$

Prvi član u H' opisuje energije vodljivog/valentnog pojasa, drugi član opisuje vezanje p-tipa unutar pojasa, a treći član opisuje međupojasno BCS vezanje. Do vezanja p-tipa dolazi zbog toga što elektroni impulsa k i $-k$, unutar zadanog pojasa, nemaju poredane spinove pa mogu formirati Cooperov par. Općenito, Zeemanovo polje će otvoriti procijep ako je $|\mu| < |h|$ zbog čega "lijepljenje" magnetskog izolatora efektivno djeluje kao rezanje 1D žice.



Slika 4.1: Spektar energije uz prisustvo T-simetrije (crvene i plave linije) i spektar s uključenim Zeemanovim poljem koje lomi simetriju (crne linije).

Zbog Fermi-Diracove statistike, efektivni potencijal, Δ_p , mora producirati neparan paritet s obzirom da se vezuju elektroni iz istog pojasa. Ovo reflektira činjenicu da se spin elektrona rotira kako mijenjamo impuls od k do $-k$. U limesu $h \gg \Delta$ te kada se potencijal μ poklapa s donjom granicom gornjeg pojasa (slika 4.1), donji pojas ne igra ulogu i može se isprojicirati postavljanjem $\psi_- \rightarrow 0$.

²⁷Spiralna baza (engl. *helical basis*).

Kako figuriraju samo impulsi oko $k = 0$, energiju (4.37) možemo razviti u red oko nule

$$\begin{aligned}\epsilon_+(k) &\approx (-\mu + h) + 0 + \frac{v^2 k^2}{2h} + \dots \equiv -\mu_{eff} + \frac{k^2}{2m_{eff}} \\ \Delta_p(k) &\approx \frac{v\Delta k}{h} + \dots \equiv \Delta_{eff} k\end{aligned}\quad (4.40)$$

pa efektivni hamiltonijan u x-prostoru ima sljedeći oblik

$$H_{eff} = \int dx \left[\psi_+^\dagger \left(-\frac{\partial_x^2}{2m_{eff}} - \mu_{eff} \right) \psi_+ + \frac{\Delta_{eff}}{2} (-\psi_+ i \partial_x \psi_+ + h.c.) \right] \quad (4.41)$$

koji opisuje Kitaev model za $\mu = -t$. Ista analiza vrijedi kada se μ podudara s vrhom donjeg pojasa. Ovo implicira da se za $h \gg \Delta$, na rubu formira trivijalna (jaka) faza kada je $|\mu| \leq h$ i topološka (slaba) faza kada vrijedi $|\mu| \geq h$. Da bi vidjeli kakva je fizika sustava za bilo koju vrijednost h i Δ , promotrit ćemo svojstvene vrijednosti neprojeciranog hamiltonijana (4.38)

$$E'_\pm(k) = \sqrt{\Delta^2 + \frac{\epsilon_+^2 + \epsilon_-^2}{2}} \pm (\epsilon_+ - \epsilon_-) \sqrt{\Delta_s^2 + \mu^2} \quad (4.42)$$

Ako izoliramo kvazičestični energijski procijep iz ovog izraza (sve što nije $\propto (vk)^2$) i riješimo kvadratnu jednadžbu po h , dobivamo da će procijep iščezavati kada vrijedi

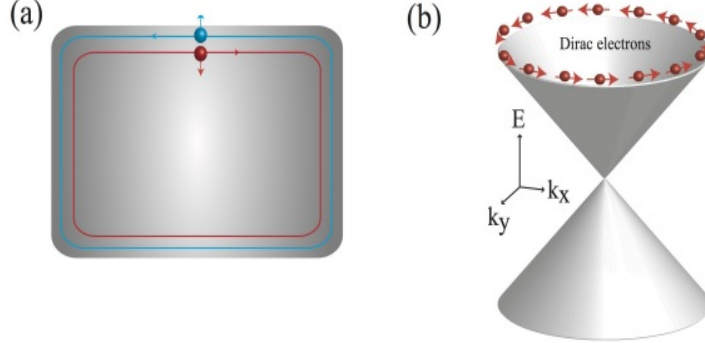
$$h = \sqrt{\Delta^2 + \mu^2} \quad (4.43)$$

Ako usporedimo s prijašnjom analizom za $h \gg \Delta$, možemo zaključiti da je rub topološkog izolatora 1D topološki supravodič kada vrijedi tzv. topološki kriterij

$$h < \sqrt{\Delta^2 + \mu^2} \quad (4.44)$$

Slična se ideja može primjeniti i na 3D topološke izolatore. 2007. godine, Liang Fu and Charlie Kane su pokazali kako se kombinacijom efekata blizine i 3D topoloških izolatora može postići $p + ip$ supravodljivost u s-tipu supravodiča. U simplificiranoj slici, koja je za naše potrebe dovoljna, možemo zamisliti spin gore elektrone koji se propagiraju u smjeru kazaljke sata i Kramerove partnere, spin dolje elektrone, koji se propagiraju u suprotno kazaljka sata (slika (4.2 a)). Rubna stanja 3D topološkog izolatora mogu se opisati

Diracovim stošcem. Na energijama blizu Fermijeveg nivoa, valentni i vodljivi pojas zauzimaju oblik donje, odnosno gornje polovice stošca, kao što je prikazano na slici (4.2 b)). Dodirna točka naziva se Diracova točka.



Slika 4.2: (a) Rubna stanja 2D topološkog izolatora koja se suprotno propagiraju. (b) Diracov stožac koji opisuje površinska stanja topološkog izolatora.

Pratimo originalnu ideju [30] i promatramo niskoenergijski Diracov hamiltonijan koji opisuje površinu topološkog izolatora

$$H_{3DTI} = \int d^2\mathbf{r} \Psi^\dagger \left[-iv_F (\partial_x \sigma^y - \partial_y \sigma^x) - \mu \right] \Psi \quad (4.45)$$

gdje je v_F brzina Diracovog stošca, μ je kemijski potencijal, a σ su Paulijeve matrice u spinskom prostoru. Kao i do sada, hamiltonijan zapisujemo u matričnoj formi i tražimo svojstvene vrijednosti. Dobivamo

$$\epsilon_{\pm}(\mathbf{k}) = \pm v_F |\mathbf{k}| - \mu \quad (4.46)$$

Dakle, hamiltonijan zadan sa (4.45) opisuje površinska svojstvena stanja s energijama $\epsilon_{\pm}(\mathbf{k})$ koja su gornja, odnosno donja grana bezmasenog Diracovog stošca s konačnim helicitetom. Sada "nalijepimo" supravodič s-tipa na izolator i koristeći efekte blizine induciramo spin-singlet vezanje. Tražimo efektivni hamiltonijan oblika

$$H_{eff} = H_{3DTI} + H_{\Delta} \quad (4.47)$$

gdje je $H_{\Delta} = \int d^2\mathbf{r} \Delta \left(\psi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow}^{\dagger} + H.c \right)$ standardni BCS hamiltonijan.

Svojstvene vrijednosti efektivnog hamiltonijana su

$$E_{\pm}(\mathbf{k}) = \sqrt{\epsilon_{\pm}(\mathbf{k})^2 + \Delta^2} \quad (4.48)$$

Kao što smo i očekivali, spektar ima energijski procijep, ali priroda stanja razdvojenih procijepom je netrivialna. To najbolje možemo vidjeti ako prijedemo u spiralnu bazu i izrazimo hamiltonijan u terminima operatora

$$\psi_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{\psi_{\mathbf{k},\uparrow} \pm e^{-i\phi_k} \psi_{\mathbf{k},\downarrow}}{\sqrt{2}}, \quad \phi_k = \tan^{-1} \left(\frac{k_x}{k_y} \right) \quad (4.49)$$

koji dodaju elektrone na gornju, odnosno donju polovicu Diracovog stošca. Hamiltonijan u Fourierovom transformatu glasi

$$H_{eff} = \sum_{s=\pm} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left\{ \epsilon_s(\mathbf{k}) \psi_s^{\dagger}(\mathbf{k}) \psi_s(\mathbf{k}) + \left[\frac{\Delta}{2} \left(\frac{k_x + ik_y}{|\mathbf{k}|} \right) \psi_s(\mathbf{k}) \psi_s(-\mathbf{k}) + h.c. \right] \right\} \quad (4.50)$$

U ovoj bazi, standardno singletno vezanje s-tipa efektivno se ponaša kao vezanje p-tipa kada se projicira na spiralne elektrone. Potencijal Δ veže rezonantne elektrone s impulsima k i $-k$, s obzirom da nose različit spin. Netrivialni angularni moment Cooperovog para dolazi od rotacije spina za 2π prilikom kruženja oko Diracovog stošca. Ako se jedan od dva spiralna sektora može isprojecirati van (npr. $\psi_- \rightarrow 0$), sustav opisan hamiltonijanom (4.50) je specifična realizacija slabe faze kiralnog $p + ip$ supravodiča, opisanog u poglavlju 3.3, s drugačijom kinetičkom energijom i potencijalom vezanja. Dakle, površina 3D topološkog izolatora formira 2D topološki supravodič za bilo koju vrijednost kemijskog potencijala μ , koji ne presijeca vodljivu/valentnu vrpcu, s obzirom da spektar kvazičestica (4.48) uvijek ima energijski procijep. Rezultirajuće 2D supravodljivo stanje razlikuje se od uobičajenog supravodiča u tome što površinska stanja nisu degenerirana zbog spina, odnosno imaju polovicu stupnjeva slobode normalnog metala. Drugačije rečeno, ova topološka faza čuva T-simetriju (lakše se vidi u originalnoj bazi s $\psi_{\uparrow}\psi_{\downarrow}$) što osigurava da je potencijal vezanja Δ imun na ne-magnetske pojave. Majorane koje se "skrivaju" unutar supravodljivog stanja otkrivaju se tek nakon loma T-simetrije. Kao i u 1D modelu, jedan od načina kako se to može postići jest kombinacijom supravodiča i feromagnetičkog izolatora čije Zeemanovo polje odmiče spinove od (x, y) ravnine.

Hamiltonijan koji opisuje rubna stanja ovakvog sustava će biti

$$H = H_{3DTI} + H_Z \quad (4.51)$$

gdje je $H_Z = -h \int dr^2 \psi^\dagger \sigma^z \psi$, $h \geq 0$ je Zeemanova energija koja modificira spektar kvazičestica na sljedeći način (za $\Delta = 0$)

$$\epsilon_{\pm}(\mathbf{k}) = -\mu \pm \sqrt{(v|\mathbf{k}|)^2 + h^2} \quad (4.52)$$

pa se na površini formiraju stanja onda kada se Fermijev nivo nalazi unutar induciranog energijskog procijepa u Diracovu stošcu. Inducirani topološki supravodič u središtu zadržava T-simetriju pa kiralnost rubnih stanja ovisi o tome prema kamo Zeemanovo polje otkloni spinove ($\pm z$).

5 Majorana modovi i topološka kvantna računala

Obična računala temelje se na bitovima koji su u jednom od stanja, $|0\rangle$ ili $|1\rangle$. U kvantnim računalima stanja se mogu nalaziti u superpoziciji što omogućava kvantnom računalu da obavlja istovremeno milijune puta više operacija od običnog. Problem koji kvantna fizika uvijek donosi sa sobom jest problem mjerenja. Ako pokušamo izmjeriti qubit - jedinicu kvantne informacije (Schumacher 1995. [33]), valna funkcija kolapsira u jedno od dozvoljenih stanja što kvantno računalo pretvara u obično. Problem se teoretski može zaobići korištenjem spregnutih stanja, ali postoji vještiji način. Kao što smo vidjeli u trećem poglavlju, Majorana vezana stanja definiraju dvostruko degenerirano stanje koje možemo interpretirati kao qubit. Ovo vodi na zaključak da $2N$ Majorana vezanih stanja definira N qubita, odnosno kvantnu memoriju. Majorana qubit je pohranjen nelokalno pa se mjerenje ne može izvršiti na jednom od vezanih stanja. Upravo nelokalnost, ili drugim riječima imunost na dekoherenciju, obećava kao temelj topoloških kvantnih računala. Mana postojećih računala jest to što je teško spriječiti sustav od slučajnog "mjerenja samoga sebe". Ako se prisjetimo, MZM-ovi se nalaze u topološki zaštićenoj fazi, što je drugi razlog zašto se toliko intenzivno radi na njihovoj realizaciji. No, što zapravo mjerimo kada želimo izmjeriti kvantnu informaciju? Mjerenje je adijabatska razmjena Majorana modova, ili općenitije, pletenje Majorana modova (engl. *braiding*). Razmjena modova vodi na fenomen neabelove statistike koja nema analogiju u čestičnoj fizici. Fermioni zadovoljavaju Fermi-Diracovu statistiku, odnosno, zamjenom dvije čestice valna funkcija mijenja predznak

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\Psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \quad (5.1)$$

što za posljedicu ima isčezavanje valne funkcije kada pokušamo dovesti dva fermiona na istu poziciju (Paulijev princip isključenja). Također, posljedica antisimetričnosti valne funkcije je da kvadrat fermionskog operatora stvaranja mora biti nula. Metodama statističke fizike možemo izvesti Fermi-Diracovu raspodjelu. Za bozone, koji zadovoljavaju Bose-Einsteinovu statistiku, kvadrat operatora stvaranja stvara identične čestice. Naši kvazičestični operatori, γ , zadovoljavaju sljedeću relaciju

$$\gamma_{i,\alpha}^2 = 1 \quad (\text{uvijek}) \quad (5.2)$$

Dodavanje kvazičestice u stanje koje već zauzima druga kvazičestica

$$\gamma_{i\alpha}\gamma_{i\alpha} |0\rangle = \gamma_{i,\alpha}^2 |0\rangle = |0\rangle \quad (5.3)$$

rezultira ponovo vakuumom. Dakle, statistički gledano, Majorana modovi ne mogu biti niti fermioni niti bozoni već ih je ispravno opisivati kao ne-Abelove anione (Isingovi anioni). Proces razmjene kvazičestica je unitarna operacija na vektorima stanja

$$|\psi_a\rangle \rightarrow U_{ab} |\psi_b\rangle \quad (5.4)$$

što generalizira uobičajeni pojam Fermi-Diracove i Bose-Einsteinove statistike (Nayak i Wilczek, 1996. [34]; Ivanov, 2001. [36]). Ovakve operacije su upravo ono što bi kvantno računalo trebalo raditi. Postupak možemo sažeti u tri koraka:

- 1) **Stvaranje:** ako se stvori par MZM-ova, oni će biti u osnovnom stanju $|0_{ij}\rangle$ bez dodatnih kvazičestičnih pobuđenja
- 2) **Pletenje:** adijabatska zamjena para MZM-ova obavlja kvantni izračun
- 3) **Mjerenje:** MZM-ovi se dovode prostorno blizu što dopušta mjerenje informacije pohranjene u qbitu.

Kao što smo (naivno) pretpostavili, 2^N puta degenerirano stanje enkodira N qbita. U sljedećoj sekciji ćemo pokazati zašto pretpostavka nije u potpunosti točna s obzirom da narušava tzv. pravilo superselekcije, a to je i razlog zašto kvantna računala s neinteragirajućim fermionima nisu kompletna.

5.1 Fermionska kvantna računala

Iz principa korespondencije znamo da se za velike kvantne brojeve očekivana vrijednost opservable mora ponašati kao realan broj. Zbog antikomutacijskih relacija fermionskih operatora, princip korespondencije vodi na antikomutirajuće Grassmanove brojeve. Ovo je razlog zašto smo prisiljeni uključiti samo samo one članove koji imaju paran broj fermionskih operatora u hamiltonijanu (ili općenitije, bilo kojem bozonskom operatoru A). Posljedica toga je očuvanje pariteta, $\mathcal{P} = \prod_k \mathcal{P}_k (-1)^{\sum_k n_k}$, u zatvorenim sustavima

$$\mathcal{P}A\mathcal{P} = A \quad \text{zbog} \quad \mathcal{P}c_j\mathcal{P} = -c_j$$

Ako se prisjetimo, supravodljivi hamiltonijan čuva paritet čak i kada broj čestica nije očuvan. Ovo zapravo predstavlja ograničenje na fiziku supravodljivosti i rezultira tzv. *pravilom superselekcije*: za dva fermionska stanja u Fockovom prostoru, $|\psi_+\rangle$ i $|\psi_-\rangle$, sa suprotnim paritetom $\mathcal{P}|\psi_\pm\rangle = \pm\psi_\pm$ slijedi

$$\langle\psi_-|A|\psi_+\rangle = \langle\psi_-|\mathcal{P}A\mathcal{P}|\psi_+\rangle = -\langle\psi_-|A|\psi_+\rangle = 0 \quad (5.5)$$

za svaku opservablu A . Ovo nam omogućava da se ograničimo na jedan sektor s fiksnim paritetom. Zbog očuvanja pariteta, trebamo dva fermionska stanja međusobno lokalizirana dovoljno daleko da bi enkodirali jedan qubit. Nadalje, možemo zaključiti da od 2^N stanja u fermionskom Fockovom prostoru samo 2^{N-1} njih se može koristiti u svrhu kvantnog računanja. Odavdje je jasno zašto su Majorana modovi u supravodičima p-tipa idealni kandidati. U nastavku ćemo pokazati na koji način kvantna računala obavljaju izračune i kako neabelova statistika proizlazi iz zamjene položaja modova, tj. pletenja. Promatramo Majorana fermione zarobljene u kvantnim vrtlozima (2D) [36], no također se može raditi u 1D s tri kvantne žice spojene u T-oblik (engl. *T-junctions*) [37]. Također, tvrdimo da se nadolazeća diskusija može primjeniti na fizikalne realizacije opisane u prošlom poglavlju.

5.2 Neabelova statistika u dvije dimenzije

Za najjednostavnije Ablove anione, zamjenom čestica u smjeru obrnutom od kazaljke na satu, sustav poprimi fazu koja u principu može biti bilo koji realan broj

$$|\Psi_1\Psi_2\rangle = e^{i\theta} |\Psi_2\Psi_1\rangle \quad (5.6)$$

Kada je $\theta = \pi$ dobivamo Fermi-Diracovu, odnosno Bose-Einsteinovu statistiku za $\theta = 2\pi$. Kao što ćemo vidjeti u nastavku, prilikom zamjene Majorana modova, faza sustava će biti kompleksnija nego u slučaju fermiona/bozona, što rezultira neabelovom statistikom. Dokazivanje ovakve statistike je netrivialno i zahtijeva analizu adijabatske evolucije valne funkcije sustava mnoštva čestica i korištenje Berryevih matrica koje povezuju različita osnovna stanja. Na svu sreću, ispostavlja se da je za određivanje konačnog stanja (do na fazu) dovoljno gledati kako se Majorana operatori transformiraju prilikom zamjene položaja.

Pretpostavimo da imamo degenerirano osnovno stanje od kojeg su pobuđena stanja razdvojena energijskim procijepom. Pletenje je lokalno, što znači da utječe samo na one čestice koje zamjenjujemo. Nadalje, pletenjem Majorana modova sustav mora ostati u mnogostrukosti osnovnog stanja - pletenje je adijabatska zamjena čestica. Parametre u hamiltonijanu treba varirati polako u odnosu na energijski procijep. Evoluciju sustava možemo prikazati operatorom vremenske evolucije $U(t) = \mathcal{T} \exp(\int_0^t dt' h(t'))$, gdje je \mathcal{T} operator vremenskog uređenja. Operatori se transformiraju na sljedeći način

$$\gamma_j(t) = U^\dagger(t) \gamma_j U(t) \quad (5.7)$$

Želimo pokazati kako možemo pomicati Majorana fermion bez da promijenimo stanje. Promatramo dva susjedna Majorana fermiona, γ_j i γ_{j+1} , koja evoluiraju u vremenu, pri čemu dobivamo nove Majorana fermione, $\gamma'_j = \gamma_j(t)$ i $\gamma'_{j+1} = \gamma_{j+1}(t)$. Kako paritet mora biti očuvan, slijedi

$$\mathcal{P} = -i\gamma_j\gamma_{j+1} = -i\gamma'_j\gamma'_{j+1} \quad (5.8)$$

S obzirom da unitarna transformacija nije utjecala na γ_{j+1} , imamo $\gamma_{j+1} = \gamma'_{j+1}$. Izraz (5.8) sada glasi

$$\mathcal{P} = -i\gamma_j\gamma_{j+1} = -i\gamma'_j\gamma_{j+1} \rightarrow \gamma_j = \gamma'_j \quad (5.9)$$

Zaključujemo kako je dopušteno pomicati Majorana fermion bez da mijenjamo stanje u kojem se sustav nalazi. Da bismo dobili grupu pletenja (engl. *braiding group*), trebamo naći kako konkretno operatori grupe djeluju na Majorane. Pretpostavimo da imamo dva kvantna vrtloga u 2D topološkom supravodiču koji zarobljavaju Majorana modove. Svakom vrtlogu se pridružuje supravodljiva faza ϕ koja iznosi 2π prilikom kruženja oko vrtloga (Berryeva faza). Zbog toga uvodimo tzv. grane *branch-cuts* i izabiremo da budu paralelne, kao što prikazuje slika niže (crtkane linije). Razmjenom vrtloga 1 i 2 u smjeru kazaljke na satu vrtlog 1 prelazi preko grane vrtloga 2. Kao posljedicu, Majorana u vrtlogu 1 dobiva fazni pomak 2π . Jednostavnosti radi, recimo da vrtlog zarobljava po jednu Majorana kvazičesticu, umjesto par pa je možemo prikazati jednim operatorom umjesto produktom dvaju operatora²⁸.

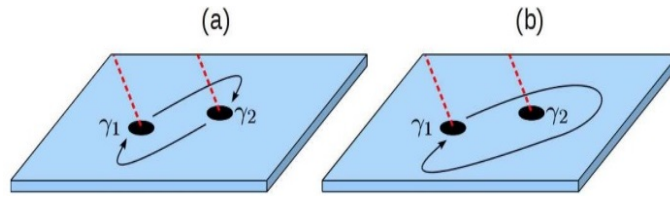
²⁸Ovo se može realizirati korištenjem kvantnih poluvrtloga [20].

U tom slučaju, prelaskom vrtloga 1 preko grane vrtloga 2, Majorana operator dobiva fazni pomak π , što rezultira s

$$\begin{aligned}\gamma_1 &\rightarrow -\gamma_2 \\ \gamma_2 &\rightarrow \gamma_1\end{aligned}\tag{5.10}$$

Zamjena u smjeru suprotnom kazaljke na satu rezultirala bi s

$$\begin{aligned}\gamma_1 &\rightarrow \gamma_2 \\ \gamma_2 &\rightarrow -\gamma_1\end{aligned}\tag{5.11}$$



Slika 5.1: Vizualizacija procesa zamjene Majorana modova. Prilikom prolaska preko grane (crtkana linija) sustav dobije fazu π .

Zamjenu možemo prikazati operatorima koji djeluju na sljedeći način

$$\gamma_j \rightarrow B_{12}\gamma_j B_{12}^\dagger\tag{5.12}$$

Operatori permutiranja Majorana modova, tj. pletenja (engl. *braiding operators*) su

$$\begin{aligned}B_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \gamma_i \gamma_j) \quad \text{smjer kazaljke na satu} \\ \tilde{B}_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \gamma_i \gamma_j) \quad \text{obrnuto od kazaljke}\end{aligned}\tag{5.13}$$

Na slici (5.1 b)), vrtlog 1 prelazi oko vrtloga 2, a zatim se vraća na početni položaj. Ovo je topološki ekvivalentno dvije uzastopne zamjene koje možemo prikazati produktom operatora

$$\begin{aligned}(B_{12})^2 &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_1 \gamma_2) (1 + \gamma_1 \gamma_2) = \frac{1}{2} (1 + 2\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_1 \gamma_2) \\ &= \frac{1}{2} (1 + 2\gamma_1 \gamma_2 - 1) = \gamma_1 \gamma_2\end{aligned}\tag{5.14}$$

Prema tome, uzastopna zamjena u smjeru kazaljke rezultira s ($\gamma_i^2 = 1, \gamma_i^\dagger = \gamma_i$)

$$\begin{aligned}\gamma_1 &\rightarrow (\gamma_1\gamma_2)\gamma_1(\gamma_1\gamma_2)^\dagger = -\gamma_1 \\ \gamma_2 &\rightarrow (\gamma_1\gamma_2)\gamma_2(\gamma_1\gamma_2)^\dagger = -\gamma_2\end{aligned}\tag{5.15}$$

Svaki Majorana operator dobije minus, što je i očekivano ako promotrimo sliku (5.1) - γ_1 prelazi preko grane vrtloga 2, a γ_2 prelazi preko grane vrtloga 1. Sljedeće želimo vidjeti kako ovi operatori djeluju na vakuum. Pretpostavimo da se fermion opisan operatorom c_i može razdvojiti u par Majorana. Sa $|0\rangle$ označit ćemo vakuumsko stanje na fermionskoj poziciji c_i . Prisjetimo se, bazu možemo transformirati na sljedeći način

$$c_j = \frac{1}{2}(\gamma_{j1} + i\gamma_{j2}), \quad c_j^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_{j1} - i\gamma_{j2})$$

Imamo na umu da vrijedi $c_i|0\rangle = 0$ i $c_i^\dagger|0\rangle = |1\rangle$. Slijedi

$$\begin{aligned}B_{12}|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_1\gamma_2)|0\rangle \\ \gamma_1\gamma_2|0\rangle &= (c_1^\dagger + c_1)ic_1^\dagger|0\rangle \\ &= i(\underbrace{c_1^\dagger c_1^\dagger}_0 + c_1 c_1^\dagger)|0\rangle \\ &= ic_1 c_1^\dagger|0\rangle = ic_1|1\rangle = i|0\rangle\end{aligned}\tag{5.16}$$

Stoga možemo zaključiti da vrijedi

$$\begin{aligned}B_{12}|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)|0\rangle \\ \tilde{B}_{12}|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)|0\rangle\end{aligned}\tag{5.17}$$

Svojstvene vrijednosti operatora pletenja su ± 1 , kao i za paritet što smo i očekivali. Nakon što smo pronašli kako operatori pletenja djeluju na Majorana operatore, cilj je vidjeti kako neabelova statistika proizlazi iz pletenja modova. Zbog očuvanja pariteta, za to nam treba sustav s najmanje četiri vrtloga koji zarobljavaju četiri Majorana moda. Potreba za minimalno četiri Majorana moda je zapravo vrlo prirodna. Proces zamjene ne može promijeniti svojstvenu vrijednost operatora broja čestica u sustavu sa dva Majorana moda. Četiri Majorana moda možemo opisati fermionskom valnom funkcijom osnovnog stanja $|n_1 n_2\rangle$, do na fazni faktor.

Prisustvo/odsustvo čestice biti će označeno s $|00\rangle$ (vakuum), $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$. Kao i do sada, namjestimo sve grane paralelno tako da zamjenom Majorana γ_i i γ_{i+1} (u smjeru kazaljke) ne prelazimo preko grane preostale dvije Majorane. U ovakvom sustavu, ako napravimo dvije uzastopne zamjene npr. γ_1 s γ_2 te γ_2 s γ_3 slijedi

$$\begin{aligned} B_{12} |00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \gamma_1 \gamma_2) |00\rangle \\ \gamma_1 \gamma_2 |00\rangle &= i (c_1^\dagger + c_1) (c_1^\dagger - c_1) |00\rangle \\ &= i \left((c_1^\dagger)^2 + c_1 c_1^\dagger \right) |00\rangle = i |00\rangle \end{aligned} \quad (5.18)$$

pa zaključujemo

$$B_{12} |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i) |00\rangle \quad (5.19)$$

Zamjena Majorana operatora γ_2 i γ_3

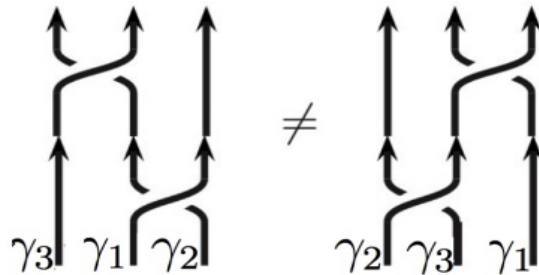
$$\begin{aligned} B_{23} |00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \gamma_2 \gamma_3) |00\rangle \\ \gamma_2 \gamma_3 |00\rangle &= i (c_1^\dagger - c_1) (c_2^\dagger + c_2) |00\rangle \\ &= i \left((c_1^\dagger c_2^\dagger + c_1^\dagger c_2 - c_1 c_2^\dagger - c_1 c_2) \right) |00\rangle \end{aligned} \quad (5.20)$$

Djelovanjem operatora poništenja na vakuum neki članovi isčezavaju pa dobivamo

$$\gamma_2 \gamma_3 |00\rangle = i c_1^\dagger c_2^\dagger |00\rangle = i |11\rangle \quad (5.21)$$

pa slijedi

$$B_{23} |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + i |11\rangle) \quad (5.22)$$



Slika 5.2: Grafički prikaz pletenja Majorana modova opisanih u tekstu.

Uzastopnim djelovanjem dvaju operatora dobivamo

$$\begin{aligned}
 B_{12}B_{23} |00\rangle &= B_{12}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + i|11\rangle)\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{12}|00\rangle + iB_{12}|11\rangle) \\
 &= \frac{1}{2}(1+i)|00\rangle + \frac{1}{2}i(1+\gamma_1\gamma_2)|11\rangle \\
 &= \frac{1}{2}(1+i)|00\rangle + \frac{1}{2}i(1+i(c_1^\dagger + c_1))(c_1^\dagger - c_1)|11\rangle \\
 &= \frac{1}{2}(1+i)|00\rangle + \frac{1}{2}i(1+i(c_1^\dagger + c_1))(0 - |01\rangle) \\
 &= \frac{1}{2}(1+i)|00\rangle + \frac{1}{2}i(1-i)|11\rangle \\
 &= \frac{1}{2}(1+i)(|00\rangle + |11\rangle)
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

pri čemu smo koristili $c_i^\dagger |11\rangle = 0$. Što se događa ako zamjene napravimo obrnutim redoslijedom?

$$\begin{aligned}
 B_{23}B_{12} |00\rangle &= B_{23}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)|00\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)B_{23}|00\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle) + i|11\rangle\right) \\
 &= \frac{1}{2}(1+i)|00\rangle + \frac{1}{2}(-1+i)|11\rangle
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Očito je kako nije svejedno kojim redoslijedom napravimo zamjenu.

Komutator operatora pletenja je

$$[B_{12}, B_{23}] = \gamma_2\gamma_3 \neq 0 \tag{5.25}$$

to jest

$$[B_{12}, B_{23}] |00\rangle = |11\rangle \tag{5.26}$$

Možemo zapisati generičku formu komutatora generatora grupe pletenja

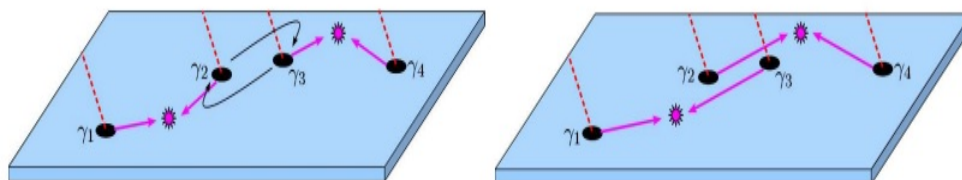
$$[B_{i-1,i}, B_{i,i+1}] = \gamma_{i-1}\gamma_{i+1} \neq 0 \tag{5.27}$$

koji definira neabelovu statistiku - različiti poredak zamjena Majorana modova producira različito konačno stanje.

Sada možemo postaviti pitanje što se računa kao zamjena modova? Očito ako zamijenimo γ_1 s γ_2 , a γ_3 s γ_4 , zbog očuvanja pariteta sustav ostaje u istom stanju (lako se provjeri djelovanjem operatora) pa slijedi

$$[B_{ij}, B_{kl}] = 0 \quad (5.28)$$

Matematički, zamjena se događa kada Majorana mod prijeđe preko grane koja se definira proizvoljno pa ovakva definicija nije dobra. Fizikalno, proces zamjene nije opservabla osim ako se jednom od zamjenjenih Majorana ne pridruži treća kako bi se formirao par, tj. fermion, koji je opservabla. Ovo je prikazano na sljedećoj slici koja prikazuje dva ekvivalentna seta operacija.

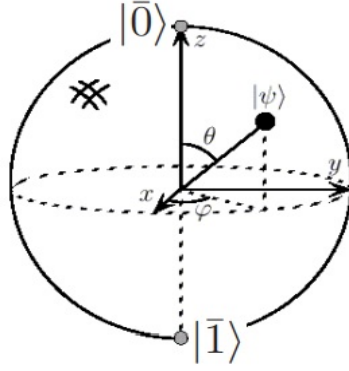


Slika 5.3: Desno: Majorana 2 i 3 su zamijenjene (crna linija), a zatim se dovode susjedne Majorane (ljubičasto) kako bi se formirali fermioni koji se mjere.

Lijevo: Nema zamjene modova već se umjesto toga direktno mjere fermioni koje formiraju najbliže susjedne Majorane (1+3 i 2+4).

Dvije operacije prikazane na slici (5.3) daju isti rezultat prilikom mjerenja fermionskih stanja. Prema tome, izračun (zamjena) se može definirati kao set uzastopnih zamjena ili definicijom kombinacija parova koji se mjere. Drugi način definiranja uklanja proizvoljnu definiciju zamjene koja ovisi o načinu na koji izaberemo grane.

Već smo spomenuli kako zbog očuvanja pariteta nije moguće promijeniti stanje sustava sa jednim parom Majorana modova već moramo imati najmanje četiri moda, ili ekvivalentno, dva standardna fermiona s fiksim paritetom za definiciju topološkog qubita. Prema tome, možemo definirati potprostor fiksnog parnog pariteta i definirati qubit sa $|\tilde{0}\rangle \equiv |00\rangle, |\tilde{1}\rangle \equiv |11\rangle$. Qubite možemo prikazati na Blochovoj sferi tako da $|\tilde{0}\rangle, |\tilde{1}\rangle$ predstavljaju sjeverni i južni pol sfere, respektivno. Stanja reprezentirana suprotnim polovima su ortogonalna. Intuitivno, suprotne točke na sferi trebale bi imati relativan minus predznak, no, upravo minus predznak prestavlja globalnu fazu koja nije mjerljiva pa nije reprezentirana Blochovom sferom.



Slika 5.4: Blochova sfera. Čista stanja reprezentirana su točkama na sferi, pri čemu qubit $|\tilde{0}\rangle$ predstavlja sjeverni, a $|\tilde{1}\rangle$ južni pol.

Bilo koja točka na sferi može se prikazati kao superpozicija $|\tilde{0}\rangle$ i $|\tilde{1}\rangle$:

$$|\psi\rangle = \alpha |\tilde{0}\rangle + \beta |\tilde{1}\rangle$$

gdje koeficijenti zadovoljavaju uvjet normalizacije $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Uobičajeni ansatz je $\alpha = \cos \gamma e^{i\delta}$, $\beta = \sin \gamma e^{i\eta}$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos \gamma e^{i\delta} |\tilde{0}\rangle + \sin \gamma e^{i\eta} |\tilde{1}\rangle \\ &= e^{i\gamma} (\cos \gamma |\tilde{0}\rangle + \sin \gamma e^{i(\eta-\delta)} |\tilde{1}\rangle) \end{aligned} \quad (5.29)$$

gdje je $e^{i\gamma}$ faza koja nije opservabilna, a $(\eta - \delta) \equiv \omega$. Želimo povezati parametre γ i ω sa sfernim koordinatama (θ, ϕ) . Kako θ počinje na sj. polu, na kojem želimo imati stanje $|\tilde{0}\rangle$

$$\begin{aligned} |\psi(0, \phi)\rangle &= |\tilde{0}\rangle \quad \text{sj. pol} \\ |\psi(\pi/2, \phi)\rangle &= |\tilde{1}\rangle \quad \text{j. pol} \end{aligned}$$

Može se provjeriti da je traženi uvjet ispunjen za $\gamma = \frac{\theta}{2}$ i $\omega = \phi$. Slijedi

$$|\psi(\theta, \phi)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\tilde{0}\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\tilde{1}\rangle \quad (5.30)$$

U bazi $\{|\tilde{0}\rangle, |\tilde{1}\rangle\}$, Paulijeve matrice se mogu prikazati kao produkt Majorana operatora

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -i\gamma_2\gamma_3 \\ \sigma_y &= -i\gamma_1\gamma_3 = -i\gamma_2\gamma_4 \\ \sigma_z &= -i\gamma_1\gamma_2 = -i\gamma_3\gamma_4 \end{aligned} \quad (5.31)$$

U tom slučaju, različite načine pletenja možemo prikazati s rotacijom jednog qubita²⁹.

Generatori grupe su

$$\begin{aligned} B_{12} = B_{34} &= e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_z} \\ B_{23} &= e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_x} \end{aligned} \tag{5.32}$$

Pletenjem operatora rotiramo jedan qubit za $\frac{\pi}{2}$. Preciznije, zamjenom $\gamma_{1,2}$ ili $\gamma_{3,4}$ rotiramo obične fermionske operatore pri čemu se producira netrivialni fazni faktor u stanjima $|n_1, n_2\rangle$. Pletenjem $\gamma_{2,3}$ zamjenjujemo 'polovicu' jednog fermionskog operatora s 'polovicom' drugog što rezultira netrivialnom rotacijom $|n_1, n_2\rangle$ unutar mnogostrukosti osnovnog stanja. Ova svojstva karakteriziraju neabelovu statistiku koju možemo sumirati rečenicom: *ako uzastopno mijenjamo položaj Majorana modova, konačno stanje ovisi o redoslijedu zamjena.*

²⁹Eksponenciranjem Paulijevih matrica dobivamo matrice rotacije.

6 Zaključak

Koncept Majorana fermiona, uveden 1937. godine, nikad nije bio popularniji. Fizičari iz širokih područja intenzivno rade na detekciji ovakve čestice, ili kvazičestice, u kontekstu fizike kondenzirane tvari. U čestičnoj fizici, koja je usko isprepletana s pitanjima kozmologije, razvojem tehnologije dostupni su sve osjetljiviji uređaji potrebni za detekciju Majorana karaktera jednog od najvećih kandidata - neutrina. Potvrdom neutrina kao Majorana čestice riješilo bi se jedno od najvećih pitanja u kozmologiji - porijeklo asimetrije materije i antimaterije. Kandidat za odgovor na ovo pitanje je primordijalni proces koji uključuje raspad teških Majorana neutrina, zajedno s CP narušenjem u leptonskom sektoru. Drugo "vruće pitanje" kozmologije je svakako tamna materija. Teorija supersimetrije zahtijeva postojanje superpartnera koji su Majorana fermioni, a ako su takve čestice stabilne, mogući su konstituenti tamne tvari. Iako su ovo fundamentalna pitanja, čiji odgovor bi revolucionirao naše shvaćanje svemira, o Majoranama se najglasnije razgovara u fizici kondenzirane tvari i informacijskim tehnologijama. Kao što smo vidjeli u prethodnim poglavljima ovog rada, kvazičestična pobuđenja u supravodičima p-tipa imaju sva svojstva Majorana fermiona: neutralne su čestice spina $1/2$, nerazpoznatljive od svojih antičestica. Pobuđenje Majorana kvazičestica na nultoj energiji (MZM-ovi), posljedica je netrivialne topologije sustava. Različite topološke faze sustava mogu se karakterizirati topološkom invarijantom koja broji MZM-ove na rubovima u sustavu s otvorenim rubnim uvjetima. U idealiziranim 1D i 2D slučajevima, opisanim u ovom radu, Majorana modovi se pojavljuju lokalizirani na krajevima lanca (1D) ili u kvantnim vrtlozima (2D) uzrokovanim penetracijom magnetskog polja kroz površinu supravodiča. Kako svaki mod predstavlja "polovicu" stvarnog fermiona, informacija koja bi se pohranila u takav fermion bila bi imuna na lokalne perturbacije, što bi riješilo problem dekoherencije u kvantnim računalima. Kako su supravodiči koji teoretski mogu realizirati Majorana pobuđenja rijetki u prirodi i daleko od idealnih kakve teorija pretpostavlja, pravi problem u cijeloj priči predstavlja konstrukcija sustava od lakše dostupnih "lego kockica". Po uzoru na Fu-Kane model, koji kombinira topološke izolatore i supravodiče s-tipa, danas postoje mnoge varijacije na temu koje obećavaju. Kao što smo opisali u prethodnom poglavlju rada, kvantni izračun je zapravo postupak uzastopne zamjene Majorana modova koji je nekomutativan - konačno stanje ovisi o redoslijedu zamjena, kao da modovi imaju "sjećanje". Robustnost i kapaciteti potencijalnih topoloških kvantnih računala su neusporedivo veći

nego kod današnjih. Ova činjenica je i razlog zašto se Majorane najaktivnije traže u ovoj domeni fizike, često pod sponzorstvom velikih tehnoloških kompanija, poput Microsofta. O velikim nadama i željama fizičara za detekcijom Majorana čestica, ali i o osjetljivosti eksperimenta, najbolje govori činjenica da je 2018. godine u časopisu *Nature* objavljen članak (Zhang, H. et al, *Quantized Majorana conductance* [39]) o uspješnoj detekciji Majorana modova, a zatim povučen. U spektroskopiji tuneliranja, signal se očituje kao skok na nultoj energiji (*zero-bias peak*, ZBP) koji ostaje na nuli prilikom variranja vanjskog magnetskog polja i napona koji kontrolira vodljivost. Teorija zahtijeva da ovaj skok bude kvantiziran na konstantnu vrijednost $2e/h$. Upravo ovakav potpis Majorana fermiona objavljen je 2018. Nekolicina fizičara koji su razvili ovu metodu detekcije (Sergey Frolov, Vincent Mourik), izrazili su 2019. sumnju u konzistentnost podataka, jer postoje druga pobuđenja koja u određenim uvjetima oponašaju robustna Majorana vezana stanja, tzv. Andreev vezana stanja. Nakon dodatnih eksperimenata i analize podataka preko cijelog seta parametara, i dalje postoji robustan ZBP, ali nadilazi vrijednost predviđenu teorijom. U zamjenskom članku, izdanom 2021., napisali su [40]:

“When the data are replotted over the full parameter range, including ranges that were not made available earlier, points are outside the 2-sigma [95%] error bars. We can therefore no longer claim the observation of a quantized Majorana conductance.”

Eleganciju teorije je teško dostići, a u praksi je teško postići topološke faze imune na smetnju i nečistoće, kao i spriječiti disipaciju energije. U budućnosti bi se svakako trebalo nastaviti tragati za alternativnim načinima realizacije Majorana modova, kao i unaprijediti postojeće. Postoje neki obećavajući pravci kojih se nismo dotaknuli u radu, kao npr. Kitaev *honeycomb* model. U vidu teorije, ona bi se u budućnosti trebala razvijati u smjeru prilagođavanja realnijim uvjetima, poput konačnih temperatura.

Iako vrlo različiti u fizikalnim manifestacijama, Majorana kvazičestična pobuđenja i neutriini ostaju ujedinjeni u opisu kroz Majorana jednadžbu, zbog čega opisana pobuđenja naivno zovemo fermionima. Bez obzira na terminologiju, potvrda postojanja Majorana kvazičestičnih pobuđenja označila bi početak novih tehnologija koje bi neupitno otvorile nova vrata razvoju znanosti.

A Dodaci

A.1 Fourierova transformacija Kitaeva hamiltonijana

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1}{N} \sum_{k,k'} -\mu \sum_{l=1}^N e^{-ik'\alpha l} c_k^\dagger e^{ikal} c_k = \sum_{k,k'} -\frac{\mu}{N} \sum_{l=1}^N e^{i(k-k')\alpha l} \\
H_2 &= -\frac{1}{N} \sum_{k,k'} t \sum_{l=1}^{N-1} \left(e^{-ik\alpha l} e^{ik'\alpha(l+1)} c_k^\dagger c_{k'} + e^{-ik\alpha(l+1)} e^{ik'\alpha l} c_k^\dagger c_{k'} \right) \\
&= \sum_{k,k'} -t \sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{N} \left(e^{i\alpha(k'(l+1)-kl)} c_k^\dagger c_{k'} + e^{i\alpha(k'l-k(l+1))} c_k^\dagger c_{k'} \right) \\
&= \sum_{k,k'} -t \sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{N} \left(e^{i\alpha(k'-k)l} e^{i\alpha k'} c_k^\dagger c_{k'} + e^{i\alpha(k'-k)l} e^{i\alpha k} c_k^\dagger c_{k'} \right) \\
&= \sum_{k,k'} -t \sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{N} \left(e^{i\alpha(k'-k)l} c_k^\dagger c_{k'} (e^{i\alpha k'} + e^{-i\alpha k}) \right) \\
H_3 &= \sum_{k,k'} -\Delta \sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{N} \left(e^{ik'\alpha l} c_{k'} e^{ik\alpha(l+1)} c_k + e^{-ik\alpha(l+1)} c_k^\dagger e^{-ik'\alpha l} c_{k'}^\dagger \right) \\
&= \sum_{k,k'} -\Delta \sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{N} \left(e^{i\alpha(k'l+k(l+1))} c_{k'} c_k + e^{-i\alpha(k(l+1)+k'l)} c_k^\dagger c_{k'}^\dagger \right) \\
&= \sum_{k,k'} -\Delta \sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{N} \left(e^{i\alpha(k+k')l} e^{i\alpha k} c_{k'} c_k + e^{-i\alpha(k+k')l} e^{-i\alpha k} c_k^\dagger c_{k'}^\dagger \right)
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Koristimo $\int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \exp\left(\frac{2\pi i(n-m)x}{N}\right) dx = N\delta_{nm}$ i dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned}
H_1 &= \sum_{k,k'} -\mu \left(\frac{1}{N} N c_k^\dagger c_{k'} \right) \delta_{k,k'} = -\mu \sum_k c_k^\dagger c_k \\
H_2 + H_3 &= -\sum_{k,k'} \frac{1}{N} \sum_l^{N-1} \left(t e^{i(k-k')\alpha l} (e^{-ik\alpha} + e^{ik'\alpha}) c_k^\dagger c_{k'} + \Delta (e^{i\alpha(k+k')l} e^{ik\alpha} c_{k'} c_k + e^{-i\alpha(k+k')l} e^{-ik\alpha} c_k^\dagger c_{k'}^\dagger) \right) \\
&= -\sum_k \left(\frac{N-1}{N} \right) \left(t (e^{-ik\alpha} + e^{ik\alpha}) c_k^\dagger c_k + \Delta (e^{ik\alpha} c_{-k} c_k + e^{-ik\alpha} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) \right)
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Kad sve zbrojimo, nakon sređivanja izraza dobivamo hamiltonijan za otvorene rubne uvjete

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{\mathbf{k}} \left(-\mu - 2t \left(1 - \frac{1}{N} \right) \cos(k\alpha) \right) c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \\
&\quad + \Delta \left(1 - \frac{1}{N} \right) \sum_{\mathbf{k}} \left(e^{ik\alpha} c_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} + e^{-ik\alpha} c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{-\mathbf{k}}^\dagger \right)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Ako promijenimo rubne uvjete (savijemo lanac u cilindar), postupak je isti osim što član $\frac{N-1}{N} \rightarrow 1$, odnosno u početnom hamiltonijanu sve sume idu do N . Dobivamo

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}} + \Delta \sum_{\mathbf{k}} \left(e^{i\mathbf{k}\alpha} c_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} + e^{-i\mathbf{k}\alpha} c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}}^{\dagger} \right) \quad (\text{A.4})$$

Ovakav izraz nije praktičan za daljnji rad, stoga ćemo drugu sumu rastaviti na dvije - onu za koju je $k = -k$ te $k \neq -k$. Također, uzet ćemo konstantu rešetke $\alpha = 1$.

$$\Delta \sum_{k=-k} \left(e^{-ik} c_k c_{-k} + e^{ik} c_{-k}^{\dagger} c_k^{\dagger} \right) + \sum_{k \neq -k} \left(e^{ik} c_{-k} c_k + e^{-ik} c_k^{\dagger} c_{-k}^{\dagger} \right) \quad (\text{A.5})$$

No prva suma je ionako sadržana u drugoj pa možemo pisati

$$\begin{aligned} & \Delta \sum_k \left[(\cos k - i \sin k) \underbrace{c_k c_{-k}}_{-c_{-k} c_k} + (\cos k + i \sin k) \underbrace{c_{-k}^{\dagger} c_k^{\dagger}}_{-c_k^{\dagger} c_{-k}^{\dagger}} + (\cos k + i \sin k) c_{-k} c_k + (\cos k - i \sin k) c_k^{\dagger} c_{-k}^{\dagger} \right] \\ & = \Delta \sum_k \left[2i \sin k \underbrace{c_{-k} c_k}_{-c_k c_{-k}} - 2i \sin k c_k^{\dagger} c_{-k}^{\dagger} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Konačno

$$\tilde{\Delta}_k = -2i\Delta \sum_k \sin k \left(c_k^{\dagger} c_{-k}^{\dagger} + c_k c_{-k} \right) \quad (\text{A.7})$$

A.2 Prelazak u polarne koordinate za 2D supravodič

Standardnom transformacijom koordinata

$$x = r \cos(\vartheta), \quad y = r \sin(\vartheta), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{A.8})$$

$$\cos(\vartheta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin(\vartheta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\sin(\vartheta)}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cos(\vartheta) \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\cos(\vartheta)}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Član hamiltonijana (3.46) koji prikazuje vezanje parova postaje

$$\partial_x + i\partial_y = [\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)] \partial_r + [-\sin(\vartheta) + i \cos(\vartheta)] \frac{\partial \vartheta}{r} = e^{i\vartheta} \left[\partial_r + \frac{i\partial \vartheta}{r} \right] \quad (\text{A.10})$$

A.3 Jednadžba svojstvenih vrijednosti za 2D p+ip supravodič u polarnim koordinatama

Tražimo svojstvene funkcije za sljedeću jednadžbu svojstvenih vrijednosti

$$\mathcal{H}(r, \vartheta)\chi(r, \vartheta) = E\chi(r, \vartheta) \quad (\text{A.11})$$

S obzirom da radimo u dvije dimenzije, operator angularnog momenta glasi

$$L_\theta = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (\text{A.12})$$

$\hbar = 1$. Parametrizacija svojstvene funkcije je oblika

$$\chi_n(r) = e^{in\theta} \omega_n(r) \quad (\text{A.13})$$

Svojstvene vrijednosti operatora su

$$L_\theta \chi_n(r) = n\chi_n(r) \quad (\text{A.14})$$

pa u hamiltonijanu izvrijednujemo derivacije po θ

$$\partial_\theta \rightarrow in$$

$$\mathcal{H}_n(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -\mu(r) & \Delta e^{-i\phi} \left(-\partial_r - \frac{n}{r}\right) \\ \Delta e^{i\phi} \left(\partial_r - \frac{n}{r}\right) & \mu(r) \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Rješavajući jednadžbu svojstvenih vrijednosti

$$\begin{pmatrix} -\mu(r) & -\Delta e^{-i\phi} \left(\partial_r + \frac{n}{r}\right) \\ \Delta e^{i\phi} \left(\partial_r - \frac{n}{r}\right) & \mu(r) \end{pmatrix} e^{in\theta} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}(f + ig) \\ e^{i\phi/2}(f - ig) \end{pmatrix} = E e^{in\theta} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}(f + ig) \\ e^{i\phi/2}(f - ig) \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

dobivamo

$$\begin{aligned} (E + n\Delta/r)f &= -i(\mu(r) - \Delta\partial_r)g \\ (E - n\Delta/r)g &= i(\mu(r) + \Delta\partial_r)f \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A.4 Identiteti korišteni u efektivnoj akciji

Grassmannovi brojevi antikomutiraju

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i \quad (\text{A.18})$$

Identitet za integraciju Grassmanovih varijabli glasi (Berezinov integral staze)

$$\left(\prod_i \int d\theta_i^\dagger d\theta_i \right) e^{-\theta_i^\dagger B_{ij} \theta_j} = \left(\prod_i \int d\theta_i^\dagger d\theta_i \right) e^{-\theta_i^\dagger b_i \theta_i} = \prod_i b_i = \det B \quad (\text{A.19})$$

Pravilo za konvoluciju Fourierovog transformata (do na faktor normalizacije)

$$\begin{aligned} \int f(t)g(t)dt &= \int d\omega \int d\omega' \tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega') \underbrace{\int e^{i(\omega+\omega')t} dt}_{\propto \delta(\omega+\omega')} \\ &= \int d\omega \tilde{f}(\omega)\tilde{g}(-\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Prilikom uzimanja konjugata treba paziti na redoslijed

$$\begin{aligned} f(t) &= \int d\omega e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega) \\ f^*(t) &\rightarrow (\tilde{f}(\omega))^* \text{ ili } \tilde{f}^*(\omega) \\ f^*(t) &= \int d\omega e^{i\omega t} \tilde{f}^*(\omega) \\ f^*(t) &= \int d\omega e^{-i\omega t} (\tilde{f}(\omega))^* \\ &\rightarrow (\tilde{f}(\omega))^* = \tilde{f}^*(-\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Literatura

- [1] P. A. M. Dirac, "The Quantum theory of electron," *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 117, 610–624; 1928.
- [2] H. Weyl, "Electron and gravitation," *Zeitschrift für Physik* 56, 330–352; 1929.
- [3] W. Pauli, "Dear radioactive ladies and gentlemen" (1930.), *Phys. Today* 31N9, 27; 1978.
- [4] P. B. Pal, "Dirac, Majorana and Weyl fermions", *Am. J. Phys.* 79, 485-498; 2011.
- [5] E. Majorana, "Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone", *Il Nuovo Cimento* (1924-1942) 14, 171; 1937.
- [6] S.R. Elliott, M. Franz, "Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics", *Rev. Mod. Phys.* 87, 137; 2015.
- [7] Landau, Lev Davidovich ; Ginzburg, V L. In: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 20, 106; 1950.
- [8] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, "Microscopic Theory of Superconductivity", *Phys. Rev.*, 106(1):162–164; 1957.
- [9] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, "Theory of Superconductivity", *Phys. Rev.* 108(5), 1175; 1957.
- [10] Meissner, W.; Ochsenfeld, R., "Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit", *Naturwissenschaften*, 21 (44), 787; 1933.
- [11] Leon N. Cooper, "Bound electron pairs in a degenerate fermi gas", *Phys. Rev.*, 104(4):1189; 1956.
- [12] J.R. Schrieffer, "Theory of superconductivity", Advanced Book Program, Perseus; 1999.
- [13] Jian-Xin Zhu, "Bogoliubov de Gennes Method and Its Applications", *Lecture Notes in Physics* 924, Springer; 2016.
- [14] Skripta "Theory of Superconductivity" prof. Carsten Timm, *TU Dresden, Institute of Theoretical Physics; 2020.*

-
- [15] F. Wilczek, "Majorana returns", *Nature Physics* 5, 614–618; 2009.
- [16] C. Chamon, R. Jackiw, Y. Nishida, S.-Y. Pi, L. Santos, "Quantizing Majorana fermions in a superconductor", *Phys. Rev. B*, 81, 224515; 2010.
- [17] A. Y. Kitaev, "Unpaired Majorana fermions in quantum wires", *Physics Uspekhi* 44, 131; 2001.
- [18] J. Alicea, "New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems" *Phys. Rev. B* 81, 125318, 2010.
- [19] A. M. Kadin, "Spatial Structure of the Cooper Pair", *J. Supercond. Novel Magn.*, 20(4), 285; 2005.
- [20] N. Read, D. Green, "Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries, and the fractional quantum Hall effect", *Phys. Rev. B*, 61, 10267; 2000.
- [21] R.E. Prange, S. M. Girvin, "The quantum Hall effect", Springer; 1990.
- [22] M. Nakahara, "Geometry, topology and physics", IOP Publishing Ltd; 2003.
- [23] Y. Tanaka, M. Sato, N. Nagaosa, "Symmetry and Topology in Superconductors- Odd-frequency pairing and edge states", *Journal of the Physical Society of Japan*; 2011.
- [24] A. Zee, "Quantum Field Theory in a Nutshell" 2nd edition, *Princeton University Press*; 2010.
- [25] A. M. Black-Schaffer, "Self-consistent superconducting proximity effect at the quantum spin Hall edge", *Phys. Rev. B* 83, 060504; 2011.
- [26] R. M. Lutchyn, J. D. Sau, S. Das Sarma, "Majorana Fermions and a Topological Phase Transition in Semiconductor-Superconductor Heterostructures" , *Phys. Rev. Lett.* 105, 077001; 2010.
- [27] Y. Oreg, G. Refael, F. von Oppen, "Helical Liquids and Majorana Bound States in Quantum Wires", *Phys. Rev. Lett.* 105, 177002; 2010.

-
- [28] Jay D. Sau, S.a Tewari "Topological superconducting state and Majorana fermions in carbon nanotubes", *Phys. Rev. B*, 88, 054503; 2013.
- [29] F. Maier, J. Klinovaja, D. Loss, "Majorana fermions in Ge/Si hole nanowires", *Phys. Rev. B*, 90, 195421; 2014.
- [30] L. Fu, C.L. Kane, "Superconducting proximity effect and Majorana fermions at the surface of a topological insulator", *Phys. Rev. Lett.* 100, 096407; 2008.
- [31] R. Aguado, "Majorana quasiparticles in condensed matter", *Rivista del Nuovo Cimento*, 40, 523; 2017.
- [32] Xiao-Liang Qi, Shou-Cheng Zhang, "Topological insulators and superconductors", *Rev. Mod. Phys.*, 83, 1057; 2011.
- [33] Benjamin Schumacher, "Quantum coding", *Phys. Rev. A* 51, 2738; 1995.
- [34] C. Nayak, F. Wilczek, "2n-quasihole states realize 2^{n-1} -dimensional spinor braiding statistics in paired quantum Hall states", *Nuclear Physics B* 479, 529; 1996.
- [35] Fabian Hassler, "Majorana qubits", *Quantum Information Processing. Lecture Notes of the 44th IFF Spring School*; 2013. (<https://arxiv.org/pdf/1404.0897.pdf>)
- [36] D. A. Ivanov, "Non-Abelian Statistics of Half-Quantum Vortices in p-Wave Superconductors", *Phys. Rev. Lett.* 86, 268; 2001.
- [37] J. Alicea, Y. Oreg, G. Refael, F. von Oppen, M. P. A. Fisher, "Non-Abelian statistics and topological quantum information processing in 1D wire networks", *Nature Physics* 7, 412–417; 2011.
- [38] M. Leijnse, K. Flensberg, "Introduction to topological superconductivity and Majorana fermions", *Semicond. Sci. Technol.* 27, 124003; 2012.
- [39] Hao Zhang et al, RETRACTED ARTICLE: "Quantized Majorana conductance", *Nature* 556, 74–79; 2018
- [40] Hao Zhang et al, "Large zero-bias peaks in InSb-Al hybrid semiconductor-superconductor nanowire devices", preprint 2021.
- [41] Tony Guenault, *Basic Superfluids*, CRC Press; 2002.