

# Teorem Ostrogradskog

---

**Banožić, Mihael**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:194:403698>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-08**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Physics - PHYRI Repository](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

FAKULTET ZA FIZIKU

Preddiplomski studij Fizika



# TEOREM OSTROGRADSKOG

Mihael Banožić

Završna preddiplomska radnja

Mentor: Mateo Paulišić, mag.phys.

Rijeka, 2022.

## Sažetak

Najpoznatiji zakoni fizike, kao što je npr. 2. Newtonov zakon, sastoje se od najviše drugih derivacija u vremenu. Postavlja se pitanje zašto se ne susrećemo sa sustavima sa višim derivacijama u vremenu? 1850. godine, ruski matematičar Mikhail Ostrogradsky predstavio je teorem koji kaže da za nedegenerirane Lagrangiane, za sustave sa višim derivacijama u vremenu, Hamiltonijan sustava sadrži barem jedan linearan član u impulsu što implicira njegovu neograničenost. U ovom radu generaliziramo jednadžbe gibanja za sustave sa višim derivacijama u vremenu, teorijski uvodimo pojam Legendreove transformacije te pokazujemo njenu primjenu u fizici. Nadalje, iskazujemo i dokazujemo teorem Ostrogradskog te dajemo nekoliko primjera kojima interpretiramo zaključke tog teorema.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>UVOD</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>JEDNADŽBE GIBANJA I MATEMATIČKI ALATI</b>	<b>2</b>
2.1	Euler - Lagrangeove jednađbe . . . . .	2
2.1.1	Euler - Lagrangeova jednađba za sustave sa prvim derivacijama u vremenu . . . . .	2
2.1.2	Euler - Lagrangeova jednađba za sustave sa drugim derivacijama u vremenu . . . . .	3
2.1.3	Euler - Lagrangeova jednađba za sustave sa $N$ - tim derivacijama u vremenu . . . . .	5
2.2	Legendreova transformacija . . . . .	5
2.2.1	Matematički uvod . . . . .	5
2.2.2	LT u klasičnoj mehanici . . . . .	10
<b>3</b>	<b>TEOREM OSTROGRADSKOG</b>	<b>12</b>
3.1	Konstrukcija Hamiltonijana za sustave sa prvim derivacijama u vremenu . . .	12
3.2	Konstrukcija Hamiltonijana za sustave sa drugim derivacijama u vremenu . . . . .	15
3.2.1	Primjer sustava sa drugim derivacijama u vremenu . . . . .	19
3.3	Konstrukcija Hamiltonijana za sustave sa $N$ - tim derivacijama u vremenu .	21
3.4	Negativna kinetička energija . . . . .	22
<b>4</b>	<b>ZAKLJUČAK</b>	<b>24</b>
	<b>Literatura</b>	<b>25</b>

# 1 UVOD

1850. godine, ruski matematičar Mikhail Ostrogradsky predstavio je teorem koji kaže da za nedegenerirane Lagrangiane, za sustave sa višim derivacijama u vremenu, Hamiltonijan sustava sadrži barem jedan linearan član u impulsu što implicira njegovu neograničenost.

U ovom radu polazimo od generalizacije jednadžbe gibanja za sustave sa višim derivacijama u vremenu. Pokazat ćemo da za sustave čiji Lagrangian sadrži više derivacije u vremenu, predznak člana u jednadžbi gibanja sa najvišom derivacijom u vremenu alternira ovisno o parnosti vremenske derivacije u Lagrangianu. Nadalje, detaljno uvodimo pojam Legendre-ove transformacije na način da prvo prezentiramo njenu teorijsku podlogu te, zatim, dajemo konkretnu primjenu kako iz danog Hamiltonijana dobiti Lagrangian i obratno.

3. poglavlje polazi od pojma nedegeneracije koju smatramo "aksiomom" ove radnje, odnosno, sve što ćemo dokazivati sadrži pretpostavku nedegeneracije. Nadalje, uz odabir Ostrogradskog, pokazujemo egzistenciju linearnog impulsa u Hamiltonijanu što implicira njegovu neograničenost u nekom smjeru u faznom prostoru. Iduću klasičnu interpretaciju teorema Ostrogradskog pokazujemo na primjeru harmoničkog oscilatora sa višim derivacijama, a to je da rješenja nemaju stabilnu ovisnost o vremenu. U konačnici, interpretiramo teorem Ostrogradskog kroz primjer sa negativnom kinetičkom energijom na način da postoji stupanj slobode sa pozitivnom kinetičkom energijom, i stupanj slobode sa negativnom kinetičkom energijom uz ključnu pretpostavku postojanja interakcije između ta dva stupnja slobode.

## 2 JEDNADŽBE GIBANJA I MATEMATIČKI ALATI

U ovom poglavlju izvest ćemo jednadžbe gibanja za sustave sa prvim i višim derivacijama u vremenu koje su neophodne za iduće poglavlje. Nadalje, prezentirat ćemo teorijsku pozadinu Legendreovih transformacija te dati uvid u njihovu konkretnu primjenu u fizici.

### 2.1 Euler - Lagrangeove jednadžbe

#### 2.1.1 Euler - Lagrangeova jednadžba za sustave sa prvim derivacijama u vremenu

Znamo da Newtonova mehanika nije jedini način za dobiti jednadžbe gibanja. U ovom poglavlju izvest ćemo jednadžbu gibanja u Lagrangeovom formalizmu u kojemu je ključni koncept za razmatranje princip najmanje akcije. Za početak promotrimo Lagrangian 1. reda, odnosno  $L = L(q, \dot{q})$ .

Nalazimo se u konfiguracijskom prostoru (postoji  $3N$  stupnja slobode). Promatramo gibanje sustava iz nekog početnog stanja  $q(t_1)$  do konačnog stanja  $q(t_2)$ . Postoji beskonačno mnogo putanja za takvo gibanje, ali mi se pitamo koja je to putanja za koju vrijedi uvjet ekstremalnosti, odnosno  $\delta S = 0$ , gdje je akcija  $S$  funkcional koji je prema definiciji

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt. \quad (1)$$

Napravimo neku malu promjenu (variramo putanju) na način

$$q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t), \quad (2)$$

a krajnje točke putanje držimo fiksnim

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0.$$

Promjena akcije postaje

$$\delta S = \delta \left( \int_{t_1}^{t_2} L dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt. \quad (3)$$

Nadalje, slijedi parcijalna integracija drugog pribrojnika integranda

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \begin{cases} u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} & dv = \delta \dot{q} dt / \int \\ du = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) & v = \delta q \end{cases}$$

$$\implies \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q.$$

Prvi pribrojnik jednak je nuli, a drugi uvrstimo u početni izraz za varijaciju od  $S$  te dobijemo

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt. \quad (4)$$

Iz uvjeta principa najmanje akcije slijedi da integrand mora biti jednak nuli, što nas dovodi do jednadžbe gibanja, odnosno Euler - Lagrangeove (E - L) jednadžbe za sustave sa prvim derivacijama u vremenu

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (5)$$

Takva formulacija ekvivalentna je drugom Newtonovom zakonu, ali očita prednost Lagrangeove formulacije je ta da forma jednadžbi ne ovisi o odabiru generaliziranih koordinata.

### 2.1.2 Euler - Lagrangeova jednadžba za sustave sa drugim derivacijama u vremenu

Promatramo Lagrangian 2. reda, tj.  $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$ . Izvod je analogan onom u prethodnom potpoglavlju, ali uz dodatno parcijalno integriranje. Varijacija od  $S$  daje

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \ddot{q} \right) dt. \quad (6)$$

Napravimo parcijalnu integraciju za 3. član integranda

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \ddot{q} \right) dt = \begin{cases} u = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} & dv = \delta \ddot{q} dt / \int \\ du = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) & v = \delta \dot{q} \end{cases}$$

$$\implies \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \ddot{q} \right) dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \dot{q} \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta \dot{q}.$$

Ključno je za spomenuti da, u odnosu na prethodno potpoglavlje, postoji dodatan uvjet

$$\delta\dot{q}(t_1) = \delta\dot{q}(t_2) = 0.$$

Uvrštavanjem dobivenog u izraz (6) te izlučivanjem  $\delta\dot{q}$  slijedi

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta \dot{q} \right] dt. \quad (7)$$

Parcijalno integriramo drugi pribrojnik iz (7)

$$\begin{cases} u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} / \frac{d}{dt} & dv = \delta \dot{q} / \int \\ du = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} & v = \delta q \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta \dot{q} \right] dt = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta q \right] dt,$$

pa, uz iščezavanje prvog pribrojnika, iz izraza (7) slijedi

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta q \right] dt. \quad (8)$$

Iz principa najmanje akcije ( $\delta S = 0$ ) dobivamo izraz za E - L jednadžbu koja sadrži vremenske derivacije 2. reda

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) = 0. \quad (9)$$

U slučaju više varijabli (9) jednostavno pišemo kao

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) = 0. \quad (10)$$



### 2.1.3 Euler - Lagrangeova jednađba za sustave sa $N$ - tim derivacijama u vremenu

Možemo primijetiti da se u izvodu za E - L jednađbu 1. reda pojavljuje jedno parcijalno integriranje što implicira predznak minus u konačnoj jednađbi. Nadalje, u izvodu E - L jednađbe 2. reda imamo dva parcijalna integriranja što implicira predznak plus u konačnoj jednađbi. Daljnji izvod slijedi za derivacije 3. reda što implicira negativan predznak u jednađbi i tako dalje. Zapažamo alternirajući predznak ovisan o redu derivacije.

Generalizirajmo za Lagrangian reda  $N$ ,  $L = L(q, \dot{q}, \dots, q^{(N)})$ . Očito, trebamo  $N$  parcijalnih integracija iz čega slijedi alternirajući predznak pa pišemo

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) - \dots \pm \frac{d^N}{dt^N} \left( \frac{\partial L}{\partial q^{(N)}} \right) = 0, \quad (11)$$

odnosno u kompaktnijem zapisu

$$\sum_{i=0}^N (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \left( \frac{\partial L}{\partial q^{(i)}} \right) = 0. \quad (12)$$

Valja uočiti da za parne potencije od  $N$  dobivamo pozitivne predznake, dok za neparne potencije dobivamo negativne predznake.

## 2.2 Legendreova transformacija

### 2.2.1 Matematički uvod

Legendreova transformacija (LT) vrlo je uobičajen matematički alat u području fizike, a posebno u klasičnoj mehanici. Prema [1], definiramo konveksan skup te konveksnu funkciju, te prema [2], uvodimo formalnu definiciju LT.

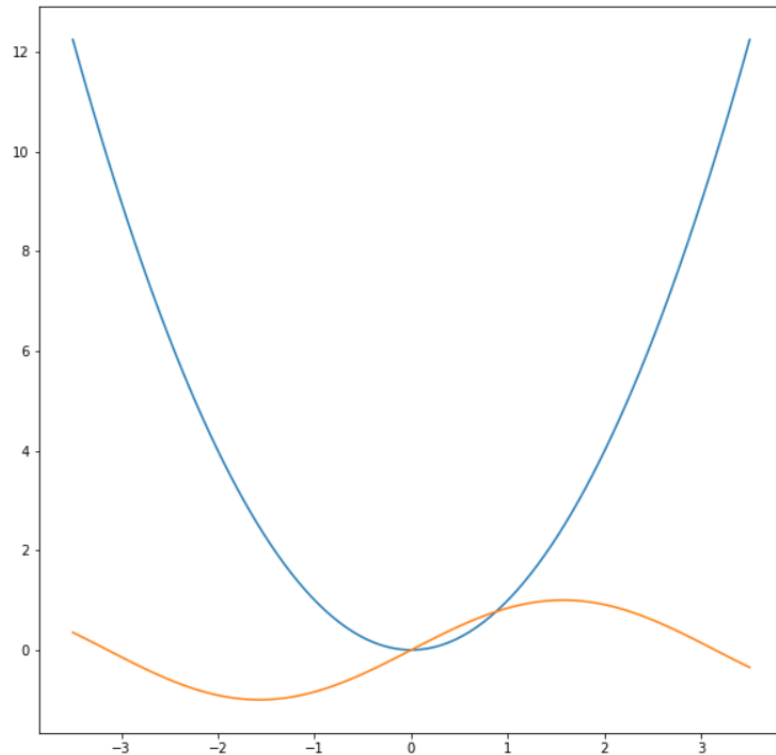
**Definicija 1** (Konveksan skup). Za  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  kažemo da je konveksan ako  $\forall P, Q \in U$  te  $t \in [0, 1]$  vrijedi  $(1 - t)P + tQ \in U$ .

Neformalnije,  $U$  konveksnom skupu je spojnica bilo kojih dviju njegovih točaka sadržana u tom skupu, dok u nekonveksnom skupu postoje barem dvije njegove točke tako da njihova spojnica nije sadržana u tom skupu.

**Definicija 2** (Konveksna funkcija). Neka je  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  neprazni konveksni skup te  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Ako za bilo koje dvije točke  $P, Q \in U$  i  $\forall t \in [0, 1]$  vrijedi da je

$$F(tP + (1 - t)Q) \leq tF(P) + (1 - t)F(Q)$$

tada za  $F$  kažemo da je konveksna funkcija na  $U$ .



Slika 1: Prikaz konveksne funkcije ( $x^2$ ) te funkcije koja nije konveksna ( $\sin(x)$ ) za danu domenu od -3.5 do 3.5.

**Definicija 3** (Legendreova transformacija). Neka je  $F$  strogo konveksna i glatka funkcija na  $\mathbb{R}$ , odnosno funkcija je klase  $C^1$  i vrijedi  $\frac{d^2F}{dx^2} > 0, \forall x$ . Legendreova transformacija je operacija koja pridružuje svaki par  $(x, F(x))$  nekom novom paru  $(s, G(s))$  prema

$$G(s) = \max_{x \in \mathbb{R}} [sx - F(x)].$$

Jedna od karakteristika konveksne funkcije je ta da je funkcija nagiba strogo monotona funkcija od  $x$ . Definirajmo tu funkciju nagiba sa  $s(x) \equiv \partial_x F(x)$ , uz korištenje pokrate  $\partial x \equiv \frac{d}{dx}$ . Ako se pomičemo uzduž krivulje prema desno ( $x$  raste) tada nagib tangente na krivulju kontinuirano raste.

Ako postoje druge derivacije od  $F$  tada za svaku vrijednost od  $x$  postoji jedinstvena vrijednost nagiba  $s$  i obratno. Matematičkim riječnikom, imamo 1 – 1 vezu između  $x$  i  $s$ :

$$x \Leftrightarrow s,$$

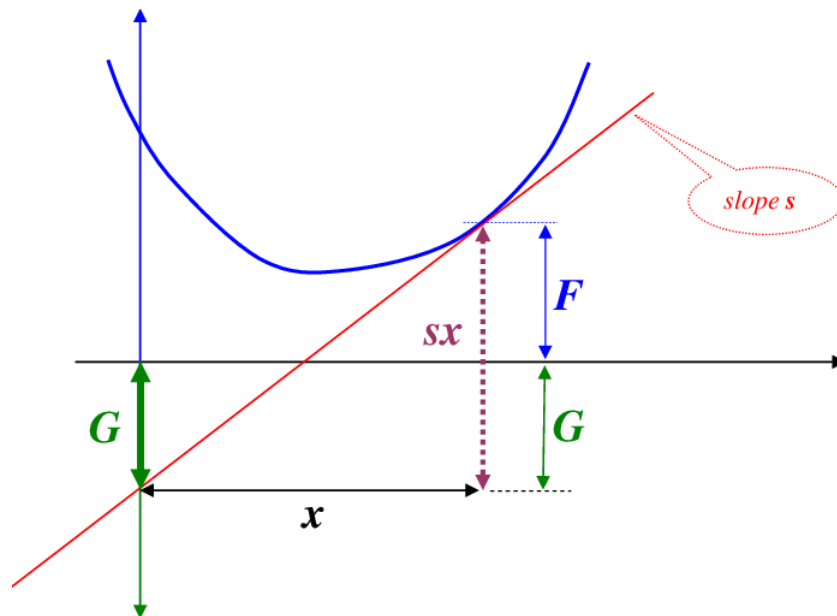
tj. za jednu vrijednost funkcije  $s(x)$  možemo dobiti jednu vrijednost od  $x(s)$  i obratno. Možemo krenuti, na primjer, sa  $s$  kao nezavisnom varijablom pa dobiti jedinstvenu vrijednost od  $x$  te ubaciti to u  $F(x)$  kako bismo mogli napisati funkciju  $F$  u terminima od  $s$ , odnosno  $F(x(s))$ . Tako smo mogli formulu, iz definicije 3, preciznije zapisati kao

$$G(s) = s \cdot x(s) - F(x(s)). \quad (13)$$

Ako diferenciramo izraz (13) primijećujemo da je nagib od  $G(s)$  jednak  $x$ :

$$x(s) = \frac{dG}{ds} \equiv \partial_s G(s). \quad (14)$$

Samu definiciju LT možemo dodatno objasniti grafički pomoću skice.



Slika 2: Grafička reprezentacija Legendredove transformacije. [2]

Izaberemo neku vrijednost od  $x$  (horizontalna linija) te, prema definiciji funkcije, dobijemo neku vrijednost  $F(x)$ . Nadalje, nacrtamo tangentu na krivulju u toj točki te ju produžimo sve do njenog sjecišta sa  $y$  - osi. U našem primjeru sjecište je negativno ( $-G$ ), a sama

udaljenost sjecišta od ishodišta je  $G$ . Sa slike je vidljivo da je  $sx = F + G$ . Intuitivno se da zaključiti da  $F$  i  $G$  daju istu informaciju, ali je informacija za  $F$  pohranjena u  $x$ , a za  $G$  u  $s$ .

Pretpostavimo da znamo funkciju  $G(s)$  te nađimo njenu LT. Nužni uvjeti, prema definiciji, su da  $G(s)$  bude konveksna i glatka funkcija. Iz prijašnjeg objašnjenja, možemo invertirati  $y(s)$  u  $s(y)$  gdje je  $y(s) = \frac{dG}{ds}$ . Nadalje, prema definiciji, konstruiramo funkciju

$$H(y) = ys(y) - G(s(y)), \quad (15)$$

gdje je  $H(y)$  LT od  $G$ .

Iz (15) slijedi

$$G = sy - H. \quad (16)$$

Izjednačimo izraze (13) i (16)

$$s \cdot x(s) - F(x(s)) = s \cdot y(s) - H(y(s)) \quad (17)$$

te iskoristimo  $x(s) = \frac{dG}{ds}$  i  $y(s) = \frac{dG}{ds}$  iz čega slijedi

$$s \cdot \frac{dG}{ds} - F = s \cdot \frac{dG}{ds} - H, \quad (18)$$

odnosno

$$H = F. \quad (19)$$

Upravo smo dokazali da je LT od  $G$  (koju smo nazvali  $H$ ) jednaka našoj originalnoj funkciji  $F$ . Općenitiji zaključak bio bi da je Legendreova transformacija Legendreove transformacije upravo naša originalna funkcija te da je LT invertibilna operacija.

Invertirajući jednadžbu (13) dobivamo

$$G(s) + F(x) = s \cdot x. \quad (20)$$

Valja naglasiti da postoji samo jedna varijabla koja je nezavisna, ili  $x$  ili  $s$ . Naveli smo da su one međusobno povezane kao  $x(s) \equiv \partial_s G(s)$  ili  $s(x) \equiv \partial_x F(x)$ . Zbog tih međusobnih ovisnosti, precizniji zapis jednadžbe (20) glasi

$$G(s) + F(x(s)) = s \cdot x(s), \quad (21)$$

ili

$$G(s(x)) + F(x) = s(x) \cdot x. \quad (22)$$

Provjerimo konzistentnost jednadžbi (14) i (21). Diferenciramo (21) po  $s$  te primijenimo lančano pravilo

$$\frac{dG(s)}{ds} + \underbrace{\frac{dF}{dx}}_{=s} \cdot \frac{dx}{ds} = \underbrace{\frac{ds}{ds}}_{=1} \cdot x(s) + s \cdot \frac{dx(s)}{ds} \quad (23)$$

$$\frac{dG(s)}{ds} + s \cdot \cancel{\frac{dx(s)}{ds}} = x(s) + s \cdot \cancel{\frac{dx(s)}{ds}} \quad (24)$$

$$\frac{dG(s)}{ds} = x(s). \quad (25)$$

□

Analognim postupkom, uz diferenciranje po  $x$ , se iz (22) dobije da vrijedi

$$\frac{dF(x)}{dx} = s(x). \quad (26)$$

Pokazali smo da su  $F$  i  $G$  međusobno LT te simetrije koje vrijede između njih:

$$G(s) + F(x) = s \cdot x$$

i

$$\partial_s G = x \quad ; \quad \partial_x F = s.$$

### 2.2.2 LT u klasičnoj mehanici

Do sada smo navodili i dokazivali određene tvrdnje koje su općenite. Sve su primjenjive na određene probleme u fizici. Ono što nas zanima je kako iz Lagrangiana, uz korištenje LT, dobiti Hamiltonijan i obratno. U kojem su oni međusobnom odnosu?

U klasičnoj mehanici, Lagrangian  $L$  je LT Hamiltonijana  $H$  te obratno. Naime, znamo da vrijedi  $L = L(q, \dot{q})$  i  $H = H(q, p)$ . Možemo pisati  $L = L(\dot{q})$  i  $H = H(p)$ , gdje su  $\dot{q}$  i  $p$  međusobno nezavisne varijable.

Pretpostavimo da nam je poznat  $L(\dot{q})$ . Uz uvjete iz definicije 3 možemo pisati

$$H(p) = p\dot{q} - L(\dot{q}). \quad (27)$$

Diferenciramo izraz (27) po  $\dot{q}$  te koristimo da  $H$  ovisi samo o  $p$

$$\underbrace{\frac{\partial H}{\partial \dot{q}}}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial \dot{q}}}_{=0} \dot{q} + p \cdot \underbrace{\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}}}_{=1} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (28)$$

$$p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (29)$$

Dobili smo jednadžbu koja ovisi o  $\dot{q}$ . Najjednostavniji slučaj za promatranje je slobodna čestica za koju vrijedi  $U = 0$  iz čega slijedi

$$L = T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2. \quad (30)$$

Uvrštavanjem (30) u (29) te rješavanjem jednadžbe dobiva se

$$\begin{aligned} p - m\dot{q} &= 0 \\ p &= m\dot{q}. \end{aligned} \quad (31)$$

Dobili smo upravo očekivani izraz, tj. definiciju impulsa.

Kao i u matematičkom uvodu, može se pokazati da vrijedi obrat. Pretpostavimo da nam je poznat  $H(p)$  pa iz definicije 3 slijedi

$$L(\dot{q}) = p\dot{q} - H(p). \quad (32)$$

Diferenciramo (32) po  $p$  tako da vrijedi  $L = L(\dot{q})$

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial p}}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial p}}_{=1} \dot{q} + p \cdot \underbrace{\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}}_{=0} - \frac{\partial H}{\partial p} \quad (33)$$

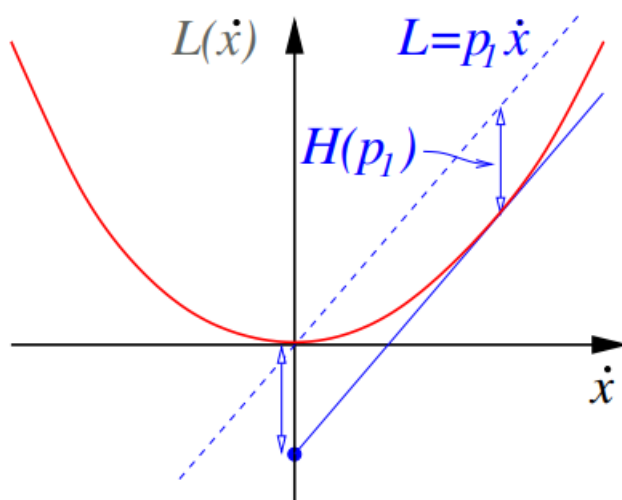
$$\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} = 0. \quad (34)$$

Za slobodnu česticu vrijedi

$$H = T = \frac{p^2}{2m}, \quad (35)$$

pa je

$$\dot{q} = \frac{p}{m}. \quad (36)$$



Slika 3: Grafički prikaz konveksne funkcije  $L(\dot{q})$ . [3]

Na temelju geometrijske interpretacije također dolazimo do željenih funkcija. Slike 2 i 3 daju istu informaciju, ali u slici 3 smo konkretizirali stvar za neku konveksnu funkciju koju u ovom slučaju nazivamo Lagrangian. Sa slike 3 vidljivo je da vrijedi  $L = p_1 \dot{q}$ . Pretpostavimo da znamo  $L(\dot{q})$  pa je nova funkcija  $H(p_1)$ , prema definiciji LT, jednaka maksimalnoj razlici između linije  $p_1 \dot{q}$  i krivulje  $L(\dot{q})$ , odnosno

$$H(p_1) \equiv \max_{\dot{q}} (p_1 \dot{q} - L(\dot{q})). \quad (37)$$

U slučaju više varijabli, Lagrangian i Hamiltonijan su jednostavno, prema LT, određeni sa

$$H(p_i, q_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(\dot{q}_i, q_i). \quad (38)$$

### 3 TEOREM OSTROGRADSKOG

#### 3.1 Konstrukcija Hamiltonijana za sustave sa prvim derivacijama u vremenu

Iskaz teorema Ostrogradskog i fizikalni primjeri bazirani su na [4].

Neka je  $L = L(q, \dot{q})$  pa jednačba gibanja glasi

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (39)$$

**Definicija 4** (Nedegeneracija). Neka je  $L = L(q, \dot{q}, \dots, q^{(N)})$ . Uvjet koji kaže da vrijedi  $\frac{\partial L}{\partial q^{(N)}} \neq 0$  naziva se nedegeneracija.

Drugim riječima, uvjet koji govori da derivacija Lagrangiana eksplicitno ovisi o najvišoj derivaciji generalizirane koordinate u vremenu naziva se nedegeneracija.

U jednačbi (39), kada je  $N = 1$ , to bi značilo da mora vrijediti  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \neq 0$ .

Neka je  $L$  nedegeneriran. Pišemo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{q}) \neq 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Uvedimo pokrate  $f_1(\dot{q}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  i  $g(q, \dot{q}) \equiv \frac{\partial L}{\partial q}$ .



Derivacija za  $f_1$  je

$$\frac{d}{dt}f_1(\dot{q}) = \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}} \cdot \ddot{q},$$

pa je

$$f_1'(\dot{q}) \cdot \ddot{q} - g(q, \dot{q}) = 0$$

$$\ddot{q} = \frac{g}{f_1'} = f(q, \dot{q}), \quad \forall f_1' \neq 0. \quad (40)$$

Upravo smo pokazali da za E - L jednadžbu, koja uključuje najviše prve derivacije, možemo zapisati  $\ddot{q}$  kao funkciju od  $q$  i  $\dot{q}$  ako i samo ako vrijedi uvjet nedegeneracije, tj.  $f_1' \neq 0$ .

Diferencijalnu jednadžbu (40) možemo riješiti ako znamo početni položaj i početnu brzinu ili ako znamo dva početna položaja. Zahtijevaju se dva početna uvjeta što implicira postojanje dviju kanonskih koordinata u faznog prostoru  $(Q, P)$  koje su, prema definiciji,

$$Q \equiv q \quad \text{i} \quad P \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (41)$$

Koristeći uvjet nedegeneracije te Legendreovu transformaciju pišemo

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}), \quad (42)$$

što znači da, zbog uvjeta nedegeneracije, možemo "izvući"  $\dot{q}$  iz (42). Koristeći se definicijama iz (41) možemo pisati

$$\dot{q} = F(Q, P). \quad (43)$$

Iz LT znamo da možemo pisati, uz korištenje izraza (41) i (43)

$$\begin{aligned} H(Q, P) &\equiv P\dot{q} - L \\ &= PF(Q, P) - L(Q, F(Q, P)). \end{aligned} \quad (44)$$

Napišimo sada Hamiltonove kanonske jednačbe:

$$\begin{aligned}
 \dot{Q} &\equiv \frac{\partial H}{\partial P} \stackrel{(44)}{=} F(Q, P) + P \frac{\partial F}{\partial P} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial F}{\partial P} \\
 &\stackrel{(41)}{=} F(Q, P) + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial F}{\partial P}} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial F}{\partial P}} \\
 &= F(Q, P).
 \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{P} &\equiv -\frac{\partial H}{\partial Q} \stackrel{(44)}{=} -P \frac{\partial F}{\partial Q} + \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial F}{\partial Q} \\
 &\stackrel{(41)}{=} \cancel{-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial F}{\partial Q}} + \frac{\partial L}{\partial q} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial F}{\partial Q}} \\
 &\stackrel{(41)}{=} \frac{\partial L}{\partial Q}.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Ako uvrstimo dobiveno u (39) vidimo da zaista vrijede E - L jednačbe

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(P) - \dot{P} &= 0 \\
 \dot{P} - \dot{P} &= 0 \\
 0 &= 0.
 \end{aligned}$$

**Primjer 1** (Harmonički oscilator za  $N = 1$ ). Na primjeru jednostavnog HO pokazati konzistentnost rješenja uz odabrane zamjene.

Lagrangian je

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Jednačba HO je linearna diferencijalna jednačba 2. reda

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Neka je poveznica starih i novih koordinata dana kao

$$X \equiv x \wedge P \equiv m\dot{x}.$$

Uz pretpostavku uvjeta nedegeneracije

$$P \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Rightarrow \dot{x} = F(X, P) \Rightarrow F(X, P) = \frac{P}{m},$$

pa je Hamiltonijan ( $H = T + U$ ) jednak

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2.$$

Vidimo da  $H(X, P)$  ima kvadratnu ovisnost i za  $X$  i za  $P$  što implicira da je ograničen (postoji minimum funkcije).

Kanonske jednačbe su

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P}{m} = F(X, P) \quad \wedge \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -m\omega^2 X.$$

Provjerimo da E - L jednačbe zaista vrijede tako da u njih uvrstimo dobiveno

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = m\dot{X} \equiv P$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial X} = -m\omega^2 X = \dot{P}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(P) - \dot{P} = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

### 3.2 Konstrukcija Hamiltonijana za sustave sa drugim derivacijama u vremenu

Neka je  $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$ . E - L jednačba tada je

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) = 0. \quad (47)$$

Zbog uvjeta nedegeneracije slijedi da  $\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \neq 0$ .

Rješenja jednadžbe (47) ovise o četiri početna uvjeta. Eksplicitno ćemo pokazati da je  $q^{(4)}$  funkcija  $q, \dots, \ddot{q}$ , odnosno da vrijedi  $q^{(4)} = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{\ddot{q}})$ .

Neka je  $A(\ddot{q}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}(\ddot{q})$  pokrata. Diferencirajući  $A$  dva puta po vremenu dobijemo

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} \cdot \frac{d\ddot{q}}{dt} = \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} \ddot{\ddot{q}} \quad (48)$$

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} q^{(4)} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} \right) \ddot{\ddot{q}}. \quad (49)$$

Koristeći činjenicu da obična i parcijalna derivacija međusobno komutiraju, drugi pribrojnik iz jednadžbe (49) pišemo kao

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ddot{q}} \left( \frac{dA}{dt} \right) &\stackrel{(48)}{=} \frac{\partial}{\partial \ddot{q}} \left( \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} \ddot{\ddot{q}} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A}{\partial \ddot{q}^2} \ddot{\ddot{q}} + \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} \frac{\partial \ddot{\ddot{q}}}{\partial \ddot{q}} \\ &= \frac{\partial^2 A}{\partial \ddot{q}^2} \ddot{\ddot{q}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Drugi pribrojnik iz (50) iščezava jer su  $\ddot{q}$  i  $\ddot{\ddot{q}}$  međusobno nezavisne varijable.

Uvrstimo dobiveno u (49)

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} q^{(4)} + \frac{\partial^2 A}{\partial \ddot{q}^2} \ddot{\ddot{q}}, \quad (51)$$

što uvrstimo u E - L jednadžbu

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} q^{(4)} + \frac{\partial^2 A}{\partial \ddot{q}^2} \ddot{\ddot{q}} = 0.$$

Za  $N = 1$  smo pokazali da prva dva pribrojnika gornje jednadžbe sadrže informaciju  $\ddot{q} = f(q, \dot{q})$ . Kod druga dva pribrojnika  $\ddot{\ddot{q}}$  nalazi se u nazivniku što implicira, iz uvjeta nedegeneracije, da su ti članovi različiti od nule. Zbog toga, možemo podijeliti sve sa članom koji stoji uz  $q^{(4)}$  (nazivnik će uvijek biti različit nuli) te zaključujemo

$$q^{(4)} = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{\ddot{q}}). \quad (52)$$

Prema navedenom, možemo zaključiti da bi za  $N = 3$  dobili diferencijalnu jednadžbu 6. reda ili, općenito, za vremenske derivacije reda  $N$  bismo dobili diferencijalnu jednadžbu  $2N$ -tog reda koja bi, prema tome, zahtijevala  $2N$  početnih uvjeta.

**Teorem 1** (Teorem Ostrogradskog). Ako postoji Lagrangian koji sadrži vremenske derivacije 2. ili višeg, ali konačnog, reda te ako zadovoljava uvjet nedegeneracije, tada postoji najmanje jedan linearan član u impulsu u Hamiltonijanu sustava.

**Dokaz.** Dokazat ćemo teorem za  $N = 2$  (za više derivacije dokaz se provodi analogno).

Neka je  $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$ .

Za riješiti jednadžbu (52) potrebna su četiri početna uvjeta pa zato fazni prostor ima četiri koordinate. Odabir Ostrogradskog je

$$\begin{aligned} Q_1 &\equiv q & ; & & P_1 &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}, \\ Q_2 &\equiv \dot{q} & ; & & P_2 &\equiv \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}. \end{aligned}$$

Iz uvjeta nedegeneracije te korištenja LT odredimo inverz od  $P_2$

$$P_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \Rightarrow \ddot{q} = G(Q_1, Q_2, P_2). \quad (53)$$

Prema definiciji LT odredimo  $H$  kao

$$H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) \equiv P_1 \dot{Q}_1 + P_2 \dot{Q}_2 - L, \quad (54)$$

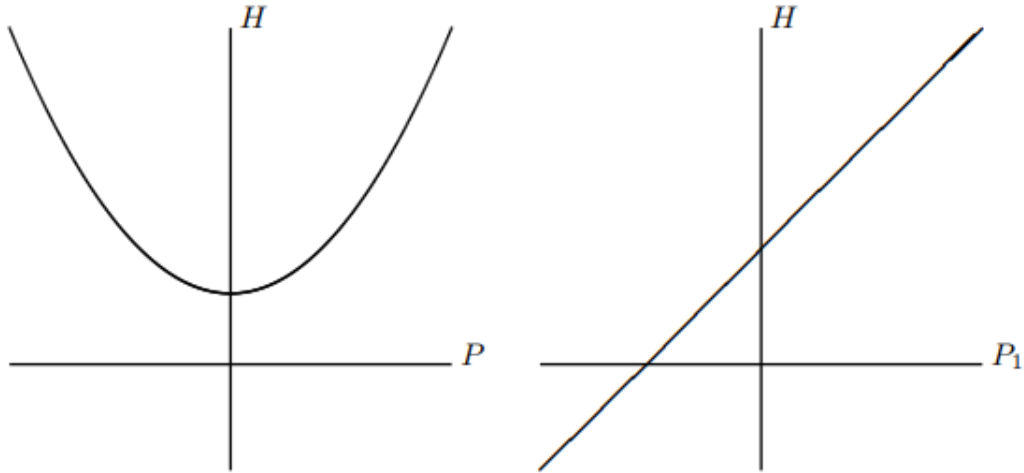
te uvrstimo potrebne odabire

$$H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = P_1 \cdot Q_2 + P_2 \cdot G(Q_1, Q_2, P_2) - L(Q_1, Q_2, G(Q_1, Q_2, P_2)). \quad (55)$$

Promatranjem jednadžbe (55) uočavamo da je prvi pribrojnik linearan u  $P_1$  iz čega slijedi da je Hamiltonijan neograničen (ne postoji minimum ni maksimum) te je teorem time dokazan.

□

Na slici 4 dana je razlika izgleda Hamiltonijana za sustave sa prvim i drugim derivacijama u vremenu. Kada je  $H$  linearan postoji neograničenost (samim time i nestabilnost sustava) dok je za kvadratni  $H$  sustav stabilan.



Slika 4: Usporedba Hamiltonijana za odabrane smjerove u faznom prostoru. [5]

Nadalje, napišimo sve četiri Hamiltonove kanonske jednadžbe. Za  $\dot{Q}_1$  samo prvi pribrojnik "preživi"

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial H}{\partial P_1} = Q_2. \quad (56)$$

$$\dot{Q}_2 = \frac{\partial H}{\partial P_2} = G(Q_1, Q_2, P_2) + \cancel{P_2 \frac{\partial G(Q_1, Q_2, P_2)}{\partial P_2}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{=P_2} \cancel{\frac{\partial G(Q_1, Q_2, P_2)}{\partial P_2}} = G(Q_1, Q_2, P_2). \quad (57)$$

$$\dot{P}_2 = -\frac{\partial H}{\partial Q_2} = -P_1 - \cancel{\frac{\partial G}{\partial Q_2} P_2} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial G}{\partial Q_2}} = -P_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -P_1 + \frac{\partial L}{\partial Q_2}. \quad (58)$$

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial Q_1} = -\cancel{P_2 \frac{\partial G}{\partial Q_1}} + \frac{\partial L}{\partial q} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial G}{\partial Q_1}} = \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial Q_1}. \quad (59)$$

Uvjerimo se da, za takve odabire, vrijedi E - L jednadžba, odnosno da u jednadžbi

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) = 0 \quad (60)$$

moramo dobiti nulu s lijeve strane. Iz odabira Ostrogradskog za  $P_1$  možemo izraziti

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial Q_2} = P_1 + \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right)}_{\dot{P}_2} = P_1 + \dot{P}_2, \quad (61)$$

te uvrštavanjem (59) i (61) u (60) dobivamo

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 - \frac{d}{dt} (\dot{P}_2 + P_1) + \ddot{P}_2 &= 0 \\ \dot{P}_1 - \ddot{P}_2 - \dot{P}_1 + \ddot{P}_2 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Dokazali smo da vrijedi E - L jednadžba za odabir Ostrogradskog.

### 3.2.1 Primjer sustava sa drugim derivacijama u vremenu

U prethodnom poglavlju pokazali smo linearnu nestabilnost u Hamiltonijanu sustava. Na sljedećem primjeru možemo vidjeti ilustraciju nestabilnosti sustava, kada on uključuje članove sa višim derivacijama u vremenu.

**Primjer 2** (Harmonički oscilator za  $N = 2$ ). Neka je dan nedegeneriran Lagrangian za HO kao

$$L = -\frac{\alpha m}{2\omega^2} \ddot{x}^2 + \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2, \quad (62)$$

gdje je  $\alpha$  parametar odstupanja u odnosu na jednostavan HO. Radi jednostavnosti zanemarujemo dimenzionalne veličine. Neka su  $\alpha = 2$  i  $\omega = 1$  te neka su početni uvjeti

$$x(0) = 1 \quad ; \quad \dot{x}(0) = 1 \quad ; \quad \ddot{x}(0) = 2 \quad ; \quad \dddot{x}(0) = 3.$$

Odrediti E - L jdbu, rješenje gibanja te dokazati da se u rješenju za Hamiltonijan dobiva linearan član u impulsu.

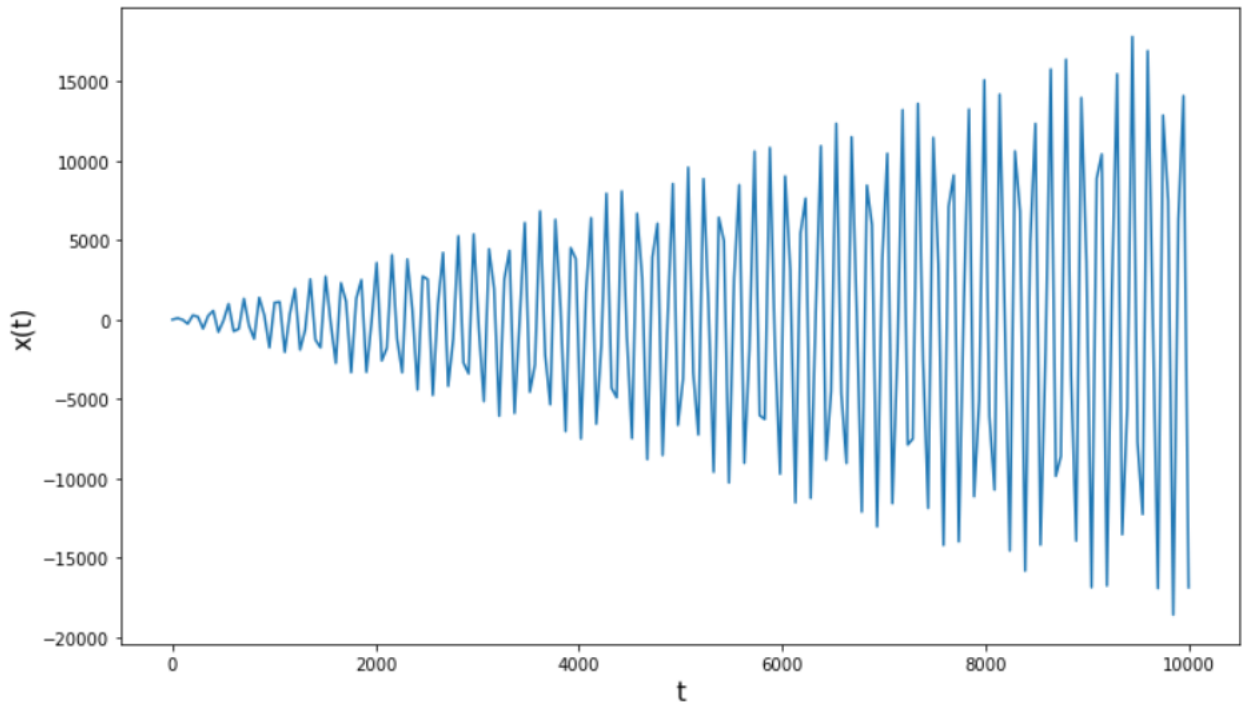
Vidimo da u izrazu (62) imamo vremenske derivacije 2. reda te jednu nezavisnu varijablu,  $x$ . Izračunamo potrebne derivacije za E - L jednadžbu

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= -m\omega^2 x \\ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= -\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -m\ddot{x} \\ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \right) &= \frac{d^2}{dt^2} \left( -\frac{\alpha m}{\omega^2} \ddot{x} \right) = -\frac{\alpha m}{\omega^2} x^{(4)} \\ \Rightarrow -\left( \frac{\alpha}{\omega^2} x^{(4)} + \ddot{x} + \omega^2 x \right) &= 0.\end{aligned}$$

Rješenje ove linearne diferencijalne jednačbe 4. reda, uz dane početne uvjete, je

$$x(t) = \left(1 - \frac{5t}{4}\right) \cos(\sqrt{2}t) + \left(\sqrt{2}t + \frac{9\sqrt{2}}{8}\right) \sin(\sqrt{2}t).$$

Na slici 5 vidimo da rješenja, za proizvoljan  $t$ , nemaju stabilnu ovisnost o vremenu.



Slika 5: Graf ovisnosti položaja o vremenu za proizvoljan bezdimenzionalan  $t \in [0, 10000]$ .



Iz odabira Ostrogradskog izračunaju se  $P_1$  i  $P_2$

$$P_1 = m\dot{x} - \left(-\frac{\alpha m}{\omega^2}\ddot{x}\right) = m\dot{x} + \frac{\alpha m}{\omega^2}\ddot{x},$$

$$\implies \ddot{x} = \frac{\omega^2 P_1 - m\omega^2 \dot{x}}{\alpha m}.$$

$$P_2 = -\frac{\alpha m}{\omega^2}\ddot{x} \implies \ddot{x} \equiv G = -\frac{\omega^2 P_2}{\alpha \cdot m},$$

pa je ukupan Hamiltonijan sustava

$$H = P_1 X_2 - \frac{\omega^2}{\alpha m} P_2^2 - \left(-\frac{\alpha m}{2\omega^2} \frac{\omega^4 P_2^2}{\alpha^2 m^2} + \frac{m}{2} X_2^2 - \frac{m\omega^2}{2} X_1^2\right)$$

$$\implies H = P_1 X_2 - \frac{\omega^2}{2\alpha m} P_2^2 - \frac{m}{2} X_2^2 + \frac{m\omega^2}{2} X_1^2.$$

Hamiltonijan sadrži u sebi linearan član impulsa čime smo, na konkretnom primjeru, dokazali teorem Ostrogradskog.

### 3.3 Konstrukcija Hamiltonijana za sustave sa $N$ - tim derivacijama u vremenu

Neka je  $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(N)})$ . U prethodnom poglavlju pokazali smo da vrijedi

$$\sum_{i=0}^N (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \left( \frac{\partial L}{\partial q^{(i)}} \right) = 0. \quad (63)$$

Ako je  $L$  nedegeneriran znači da iz (63) slijedi diferencijalna jednadžba  $2N$  - tog reda što implicira potrebu za  $2N$  početnih uvjeta. Odabir Ostrogradskog je

$$Q_i \equiv q^{(i-1)} \quad ; \quad P_i \equiv \sum_{j=i}^N \left( -\frac{d}{dt} \right)^{j-i} \frac{\partial L}{\partial q^{(j)}}. \quad (64)$$

Kao i ranije, ako znamo  $L$  iskoristimo definiciju Legendreove transformacije za napisati Hamiltonijan  $H$

$$\begin{aligned}
H &\equiv \sum_{i=1}^N P_i q^{(i)} - L \\
&= P_1 \dot{q} + P_2 \ddot{q} + \dots + P_{N-1} q^{(N-1)} + P_N q^{(N)} - L(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(N)}) \\
&= P_1 Q_2 + P_2 Q_3 + \dots + P_{N-1} Q_N + P_N K - L(Q_1, \dots, Q_N, K),
\end{aligned} \tag{65}$$

gdje smo, kao i za  $N = 2$ , zbog uvjeta nedegeneracije napravili inverz

$$P_N = \frac{\partial L}{\partial q^{(N)}} \Rightarrow q^{(N)} \equiv K(Q_1, \dots, Q_N, P_N). \tag{66}$$

Važno je za primijetiti da se u jednadžbi (65) počinje od  $Q_2$  jer, koristeći izraz za  $H$ , trebaju nam samo oni  $Q$  - ovi koji u sebi sadrže derivacije.

### 3.4 Negativna kinetička energija

Ovdje ćemo pokazati još jednu interpretaciju teorema koja je bazirana na [6].

Neka je generalizirana koordinata  $\phi$ . Najlakše je za promotriti Lagrangian 2. reda pa akciju sustava pišemo kao

$$S[\phi] = \int dt \frac{1}{2} \ddot{\phi}^2, \tag{67}$$

gdje je  $L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi) = \frac{1}{2} \ddot{\phi}^2$ . E - L jednadžba je

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{\phi}} \right) = 0. \tag{68}$$

Nadalje, uvodimo pomoćnu varijablu  $\psi$  koja je definirana kao  $\psi \equiv \ddot{\phi}$ . Iskoristimo da vrijedi

$$\frac{1}{2} (\ddot{\phi} - \psi)^2 = \frac{1}{2} \ddot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \psi^2 - \ddot{\phi} \psi = 0, \tag{69}$$

iz čega izrazimo prvi pribrojnik, napravimo supstitucije  $u = \psi$  i  $dv = \ddot{\phi}$  te, uz parcijalnu integraciju, uvrstimo u (68)

$$S[\phi, \psi] = \int dt \left( \ddot{\phi} \psi - \frac{1}{2} \psi^2 \right) = \int dt \left( -\dot{\phi} \dot{\psi} - \frac{1}{2} \psi^2 \right) + [\dot{\phi} \psi], \tag{70}$$

gdje smo posebno izdvojili član u uglatoj zagradi iz razloga što on ne doprinosi jednadžbama gibanja (one su izvedene iz principa najmanje akcije) pa jedino što gledamo je integrand od  $S$ . Sada možemo napisati novi Lagrangian kojega nazivamo ekvivalentni Lagrangian

$$\tilde{L}(\dot{\phi}, \phi, \dot{\psi}, \psi) = -\dot{\phi} \dot{\psi} - \frac{1}{2} \psi^2 \tag{71}$$

Raspisivajući E - L jednadžbe za  $\phi$  i  $\psi$  potvrđujemo da opisuju isti sustav, odnosno da su jednake

$$\begin{aligned}\phi : \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \ddot{\psi} = 0, \\ \psi : \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) &= \psi - \ddot{\phi} = 0.\end{aligned}\tag{72}$$

Nadalje, definirajmo nove varijable kao

$$\Phi \equiv \frac{\phi - \psi}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \Psi \equiv \frac{\phi + \psi}{\sqrt{2}},\tag{73}$$

pa ih uvrstimo u (72)

$$\tilde{L}(\dot{\Phi}, \Phi, \dot{\Psi}, \Psi) = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2} \dot{\Psi}^2 - \frac{1}{4} (\Phi - \Psi)^2,\tag{74}$$

iz čega vidimo da je  $\dot{\Psi}$  doprinos negativne kinetičke energije. Kanonske jednadžbe su

$$P_{\Phi} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi} \quad ; \quad P_{\Psi} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\Psi}} = -\dot{\Psi}.\tag{75}$$

Izrazimo brzine u terminima impulsa pa je Hamiltonijan

$$\begin{aligned}H &= P_{\Phi}^2 - P_{\Psi}^2 - \left[ \frac{1}{2} P_{\Phi}^2 - \frac{1}{2} P_{\Psi}^2 - \frac{1}{4} (\Phi - \Psi)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} P_{\Phi}^2 - \frac{1}{2} P_{\Psi}^2 + \frac{1}{4} (\Phi - \Psi)^2.\end{aligned}\tag{76}$$

Dobili smo negativan kinetički član od  $\Psi$ . Ukupna energija sustava biti će očuvana zbog načina na koji su  $\Phi$  i  $\Psi$  povezani. Konkretnije,  $\Phi$  može dobiti proizvoljno veliki doprinos u kinetičkoj energiji.

## 4 ZAKLJUČAK

Prva zanimljiva stvar koju smo pokazali, a nužna je za daljnja razmatranja u radu, je alternirajući predznak u  $E - L$  jednadžbama koji ovisi o tome kojeg je reda vremenska derivacija člana koji se pojavljuje u Lagrangianu. Uveli smo pojam Legendreove transformacije na način da smo prvo prezentirali njenu teorijsku podlogu te, zatim, dali konkretnu primjenu kako iz danog Hamiltonijana dobiti Lagrangian i obratno.

Koristeći uvjet nedegeneracije kao nužan uvjet u razmatranju teorema Ostrogradskog, dali smo tri različite interpretacije teorema. Pokazali smo kako izgledaju jednadžbe gibanja za sustave sa višim derivacijama u vremenu, demonstrirali teorem Ostrogradskog za sustave sa 2. derivacijama u vremenu u Lagrangianu i pokazali njegovu konstrukciju za  $N$ -te derivacije. Pokazali smo kako se nestabilnost manifestira na rješenjima jednostavnog sustava sa višim derivacijama u vremenu, i konačno, pokazali smo kako kinetička energija u takvom sustavu može u nekim stupnjevima slobode dobiti proizvoljno veliku vrijednost. Nužno je za naglasiti da ako uvedemo određena ograničenja možemo izaći iz gore navedenih problema i to, prema [6], na tri različita načina; ako kažemo da su derivacije beskonačnog reda, ako proglasimo Lagrangian degeneriranim te ako imamo samo jednu vremensku derivaciju u Lagrangianu. Za kraj treba reći da je područje teorije viših derivacija itekako zastupljeno u fizici te se fizičari njome aktivno bave. Takve teorije su najzastupljenije u području teorije polja, poput [7].

## Literatura

- [1] Šime Ungar, Matematička analiza 3, 3. izdanje, Prirodoslovno matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu (2002)
- [2] R. K. P. Zia, Edward F. Redish, Susan R. McKay, Making Sense of the Legendre Transform, arXiv:0806.1147 (2009)
- [3] Mark Alford, Legendre Transforms, [https://web.physics.wustl.edu/alford/physics/Legendre introduction.pdf](https://web.physics.wustl.edu/alford/physics/Legendre%20introduction.pdf) (2019)
- [4] R. P. Woodard, Ostrogradsky theorem on Hamiltonian instability, arXiv:1506.02210 [hep-th] (2015)
- [5] Floris Harmanni, Higher Order Lagrangians for classical mechanics and scalar fields, <https://fse.studenttheses.ub.rug.nl/14149/1/HigherOrderLagrangians.pdf> (2016)
- [6] Eleonora Svanberg, Theories with higher-order time derivatives and the Ostrogradsky ghost, <https://diva-portal.org/smash/get/diva2:1667027/FULLTEXT01.pdf> (2022)
- [7] Marco Crisostomi, Remko Klein and Diederik Roest, Higher Derivative Field Theories: Degeneracy Conditions and Classes, arXiv:1703.01623 [hep-th] (2017)