Teorem Ostrogradskog

Banožić, Mihael

SVEUČILIŠTE U RIJECI

FAKULTET ZA FIZIKU

Preddiplomski studij Fizika

TEOREM OSTROGRADSKOG

Mihael Banožić

Završna preddiplomska radnja

Mentor: Mateo Paulišić, mag.phys.

Rijeka, 2022.

Sažetak

Najpoznatiji zakoni fizike, kao što je npr. 2. Newtonov zakon, sastoje se od najviše drugih derivacija u vremenu. Postavlja se pitanje zašto se ne susrećemo sa sustavima sa višim derivacijama u vremenu? 1850. godine, ruski matematičar Mikhail Ostrogradsky predstavio je teorem koji kaže da za nedegenerirane Lagrangiane, za sustave sa višim derivacijama u vremenu, Hamiltonijan sustava sadrži barem jedan linearan član u impulsu što implicira njegovu neograničenost. U ovom radu generaliziramo jednadžbe gibanja za sustave sa višim derivacijama u vremenu, teorijski uvodimo pojam Legendreove transformacije te pokazujemo njenu primjenu u fizici. Nadalje, iskazujemo i dokazujemo teorem Ostrogradskog te dajemo nekoliko primjera kojima interpretiramo zaključke tog teorema.

Sadržaj

1 UVOD

1850. godine, ruski matematičar Mikhail Ostrogradsky predstavio je teorem koji kaže da za nedegenerirane Lagrangiane, za sustave sa višim derivacijama u vremenu, Hamiltonijan sustava sadrži barem jedan linearan član u impulsu što implicira njegovu neograničenost.
U ovom radu polazimo od generalizacije jednadžbe gibanja za sustave sa višim derivacijama u vremenu. Pokazat ćemo da za sustave čiji Lagrangian sadrži više derivacije u vremenu, predznak člana u jednadžbi gibanja sa najvišom derivacijom u vremenu alternira ovisno o parnosti vremenske derivacije u Lagrangianu. Nadalje, detaljno uvodimo pojam Legendre-ove transformacije na način da prvo prezentiramo njenu teorijsku podlogu te, zatim, dajemo konkretnu primjenu kako iz danog Hamiltonijana dobiti Lagrangian i obratno.
3. poglavlje polazi od pojma nedegeneracije koju smatramo "aksiomom" ove radnje, odnosno, sve što ćemo dokazivati sadrži pretpostavku nedegeneracije. Nadalje, uz odabir Ostrogradskog, pokazujemo egzistenciju linearnog impulsa u Hamiltonijanu što implicira njegovu neograničenost u nekom smjeru u faznom prostoru. Iduću klasičnu interpretaciju teorema Ostrogradskog pokazujemo na primjeru harmoničkog oscilatora sa višim derivacijama, a to je da rješenja nemaju stabilnu ovisnost o vremenu. U konačnici, interpretiramo teorem Ostrogradskog kroz primjer sa negativnom kinetičkom energijom na način da postoji stupanj slobode sa pozitivnom kinetičkom energijom, i stupanj slobode sa negativnom kinetičkom energijom uz ključnu pretpostavku postojanja interakcije između ta dva stupnja slobode.

2 JEDNADŽBE GIBANJA I MATEMATIČKI ALATI

U ovom poglavlju izvest ćemo jednadžbe gibanja za sustave sa prvim i višim derivacijama u vremenu koje su neophodne za iduće poglavlje. Nadalje, prezentirat ćemo teorijsku pozadinu Legendreovih transformacija te dati uvid u njihovu konkretnu primjenu u fizici.

2.1 Euler - Lagrangeove jednadžbe

2.1.1 Euler - Lagrangeova jednadžba za sustave sa prvim derivacijama u vremenu

Znamo da Newtonova mehanika nije jedini način za dobiti jednadžbe gibanja. U ovom poglavlju izvest ćemo jednadžbu gibanja u Lagrangeovom formalizmu u kojemu je ključni koncept za razmatranje princip najmanje akcije. Za početak promotrimo Lagrangian 1. reda, odnosno $L = L(q, \dot{q})$.

Nalazimo se u konfiguracijskom prostoru (postoji $3N$ stupnja slobode). Promatramo gibanje sustava iz nekog početnog stanja $q(t_1)$ do konačnog stanja $q(t_2)$. Postoji beskonačno mnogo putanja za takvo gibanje, ali mi se pitamo koja je to putanja za koju vrijedi uvjet ekstremalnosti, odnosno $\delta S = 0$, gdje je akcija S funkcional koji je prema definiciji

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt. \tag{1}$$

Napravimo neku malu promjenu (variramo putanju) na način

$$q(t) \to q(t) + \delta q(t), \tag{2}$$

a krajnje točke putanje držimo fiksnim

$$\delta q\left(t_1\right) = \delta q\left(t_2\right) = 0.$$

Promjena akcije postaje

$$\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt. \tag{3}$$

Nadalje, slijedi parcijalna integracija drugog pribrojnika integranda

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \left\{ \begin{array}{cc} u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} & dv = \delta \dot{q}\, dt / \int \\ du = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) & v = \delta q \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q.$$

Prvi pribrojnik jednak je nuli, a drugi uvrstimo u početni izraz za varijaciju od S te dobijemo

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt. \tag{4}$$

Iz uvjeta principa najmanje akcije slijedi da integrand mora biti jednak nuli, što nas dovodi do jednadžbe gibanja, odnosno Euler - Lagrangeove (E - L) jednadžbe za sustave sa prvim derivacijama u vremenu

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \tag{5}$$

Takva formulacija ekvivalentna je drugom Newtonovom zakonu, ali očita prednost Lagrangeove formulacije je ta da forma jednadžbi ne ovisi o odabiru generaliziranih koordinata.

2.1.2 Euler - Lagrangeova jednadžba za sustave sa drugim derivacijama u vremenu

Promatramo Lagrangian 2. reda, tj. $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$. Izvod je analogan onom u prethodnom potpoglavlju, ali uz dodatno parcijalno integriranje. Varijacija od S daje

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \ddot{q} \right) dt. \tag{6}$$

Napravimo parcijalnu integraciju za 3. član integranda

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \ddot{q} \right) dt = \begin{cases} u = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} & dv = \delta \ddot{q}\, dt / \int \\ du = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) & v = \delta \dot{q} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \ddot{q} \right) dt = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \dot{q} \bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta \dot{q}.$$

Ključno je za spomenuti da, u odnosu na prethodno potpoglavlje, postoji dodatan uvjet

$$\delta\dot{q}\left(t_1\right)=\delta\dot{q}\left(t_2\right)=0.$$

Uvrštavanjem dobivenog u izraz (6) te izlučivanjem $\delta\dot{q}$ slijedi

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\right)\delta\dot{q}\right]dt. \tag{7}$$

Parcijalno integriramo drugi pribrojnik iz (7)

$$\begin{cases} u=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}/\frac{d}{dt} & dv=\delta\dot{q}/\int \\ du=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}} & v=\delta q \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\right)\delta\dot{q}\right]dt=\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\right)\delta q\Bigg|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\right)\delta q\right]dt,$$

pa, uz iščezavanje prvog pribrojnika, iz izraza (7) slijedi

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\right)\delta q\right]dt. \tag{8}$$

Iz principa najmanje akcije ($\delta S=0$) dobivamo izraz za E - L jednadžbu koja sadrži vremenske derivacije 2. reda

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}}\right)=0. \tag{9}$$

U slučaju više varijabli (9) jednostavno pišemo kao

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_i}\right)=0. \tag{10}$$

2.1.3 Euler - Lagrangeova jednadžba za sustave sa N - tim derivacijama u vremenu

Možemo primijetiti da se u izvodu za E - L jednadžbu 1. reda pojavljuje jedno parcijalno integriranje što implicira predznak minus u konačnoj jednadžbi. Nadalje, u izvodu E - L jednadžbe 2. reda imamo dva parcijalna integriranja što implicira predznak plus u konačnoj jednadžbi. Daljnji izvod slijedi za derivacije 3. reda što implicira negativan predznak u jednadžbi i tako dalje. Zapažamo alternirajući predznak ovisan o redu derivacije. Generalizirajmo za Lagrangian reda N, $L = L\left(q, \dot{q}, \ldots, q^{(N)}\right)$. Očito, trebamo N parcijalnih integracija iz čega slijedi alternirajući predznak pa pišemo

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) - \cdots \pm \frac{d^N}{dt^N}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(N)}}\right) = 0, \tag{11}$$

odnosno u kompaktnijem zapisu

$$\sum_{i=0}^{N}(-1)^i \frac{d^i}{dt^i}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(i)}}\right) = 0. \tag{12}$$

Valja uočiti da za parne potencije od N dobivamo pozitivne predznake, dok za neparne potencije dobivamo negativne predznake.

2.2 Legendreova transformacija

2.2.1 Matematički uvod

Legendreova transformacija (LT) vrlo je uobičajen matematički alat u području fizike, a posebno u klasičnoj mehanici. Prema [1], definiramo konveksan skup te konveksnu funkciju, te prema [2], uvodimo formalnu definiciju LT.

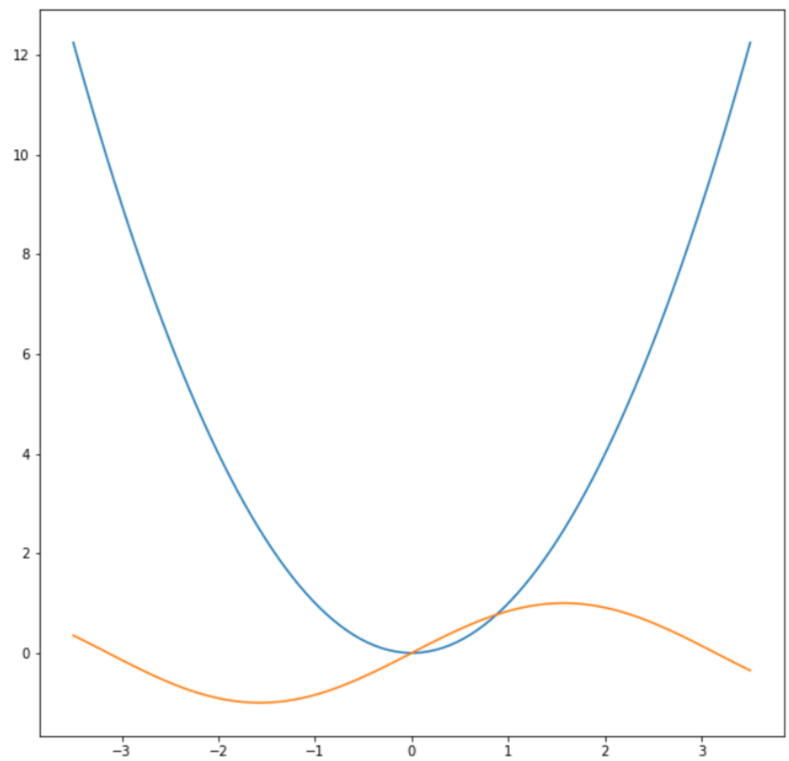
Definicija 1 (Konveksan skup)**.** Za $U \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je konveksan ako $\forall P, Q \in U$ te $t \in [0,1]$ vrijedi $(1-t)P + tQ \in U$.

Neformalnije, U konveksnom skupu je spojnica bilo kojih dviju njegovih točaka sadržana u tom skupu, dok u nekonveksnom skupu postoje barem dvije njegove točke tako da njihova spojnica nije sadržana u tom skupu.

Definicija 2 (Konveksna funkcija)**.** Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazni konveksni skup te $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ako za bilo koje dvije točke $P, Q \in U$ i $\forall t \in [0, 1]$ vrijedi da je

$$F\left(tP + (1-t)Q\right) \leq \; tF\left(P\right) + (1-t)F\left(Q\right)$$

tada za F kažemo da je konveksna funkcija na U.



Slika 1: Prikaz konveksne funkcije (x^2) te funkcije koja nije konveksna ($\sin(x)$) za danu domenu od -3.5 do 3.5.

Definicija 3 (Legendreova transformacija)**.** Neka je F strogo konveksna i glatka funkcija na R, odnosno funkcija je klase C^1 i vrijedi $\frac{d^2F}{dx^2} > 0, \forall x$. Legendreova transformacija je operacija koja pridružuje svaki par $(x, F(x))$ nekom novom paru $(s, G(s))$ prema

$$G(s) = \max_{x \in \mathbb{R}}[sx - F(x)].$$

Jedna od karakteristika konveksne funkcije je ta da je funkcija nagiba strogo monotona funkcija od x. Definirajmo tu funkciju nagiba sa $s(x) \equiv \partial_x F(x)$, uz korištenje pokrate $\partial x \equiv \frac{d}{dx}$. Ako se pomičemo uzduž krivulje prema desno (x raste) tada nagib tangente na krivulju kontinuirano raste.

Ako postoje druge derivacije od F tada za svaku vrijednost od x postoji jedinstvena vrijednost nagiba s i obratno. Matematičkim riječnikom, imamo $1-1$ vezu između x i s:

$$x \Leftrightarrow s,$$

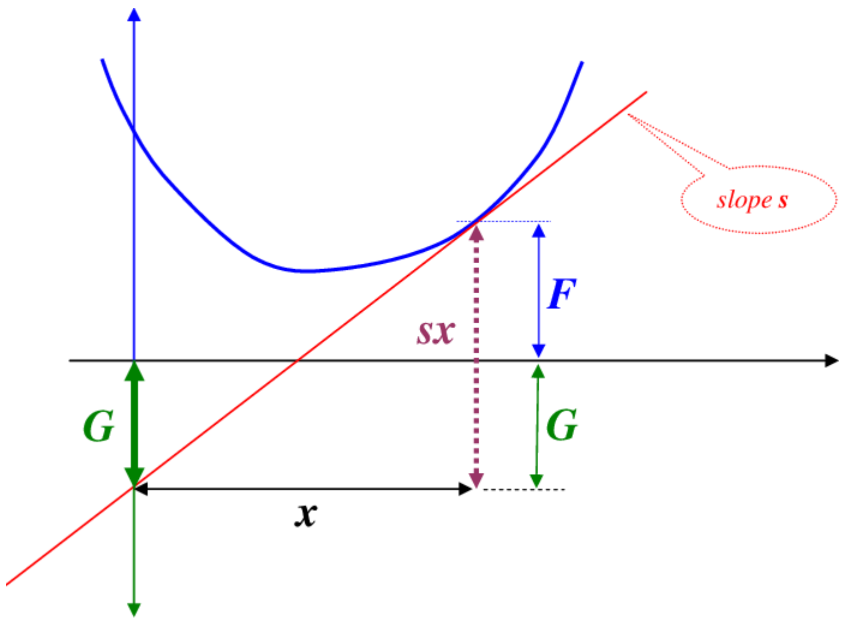
tj. za jednu vrijednost funkcije $s(x)$ možemo dobiti jednu vrijednost od $x(s)$ i obratno. Možemo krenuti, na primjer, sa s kao nezavisnom varijablom pa dobiti jedinstvenu vrijednost od x te ubaciti to u $F(x)$ kako bismo mogli napisati funkciju F u terminima od s, odnosno $F(x(s))$. Tako smo mogli formulu, iz definicije 3, preciznije zapisati kao

$$G(s) = s \cdot x(s) - F(x(s)). \tag{13}$$

Ako diferenciramo izraz (13) primijećujemo da je nagib od $G(s)$ jednak x:

$$x(s) = \frac{dG}{ds} \equiv \partial_s G(s). \tag{14}$$

Samu definiciju LT možemo dodatno objasniti grafički pomoću skice.



Slika 2: Grafička reprezentacija Legenredove transformacije. [2]

Izaberemo neku vrijednost od x (horizontalna linija) te, prema definiciji funckije, dobijemo neku vrijednost $F(x)$. Nadalje, nacrtamo tangentu na krivulju u toj točki te ju produžimo sve do njenog sjecišta sa y - osi. U našem primjeru sjecište je negativno $(-G)$, a sama udaljenost sjecišta od ishodišta je G. Sa slike je vidljivo da je $sx = F + G$. Intuitivno se da zaključiti da F i G daju istu informaciju, ali je informacija za F pohranjena u x, a za G u s.

Pretpostavimo da znamo funkciju $G(s)$ te nađimo njenu LT. Nužni uvjeti, prema definiciji, su da $G(s)$ bude konveksna i glatka funkcija. Iz prijašnjeg objašnjenja, možemo invertirati $y(s)$ u $s(y)$ gdje je $y(s) = \frac{dG}{ds}$. Nadalje, prema definiciji, konstruiramo funkciju

$$H(y) = ys(y) - G(s(y)), \tag{15}$$

gdje je $H(y)$ LT od G.

Iz (15) slijedi

$$G = sy - H. \tag{16}$$

Izjednačimo izraze (13) i (16)

$$s \cdot x(s) - F(x(s)) = s \cdot y(s) - H(y(s)) \tag{17}$$

te iskoristimo $x(s) = \frac{dG}{ds}$ i $y(s) = \frac{dG}{ds}$ iz čega slijedi

$$\cancel{s \cdot \frac{dG}{ds}} - F = \cancel{s \cdot \frac{dG}{ds}} - H, \tag{18}$$

odnosno

$$H = F. \tag{19}$$

Upravo smo dokazali da je LT od G (koju smo nazvali H) jednaka našoj originalnoj funkciji F. Općenitiji zaključak bio bi da je Legendreova transformacija Legendreove transformacije upravo naša originalna funkcija te da je LT invertibilna operacija.

Invertirajući jednadžbu (13) dobivamo

$$G(s) + F(x) = s \cdot x. \tag{20}$$

Valja naglasiti da postoji samo jedna varijabla koja je nezavisna, ili x ili s. Naveli smo da su one međusobno povezane kao $x(s) \equiv \partial_s G(s)$ ili $s(x) \equiv \partial_x F(x)$. Zbog tih međusobnih ovisnosti, precizniji zapis jednadžbe (20) glasi

$$G(s) + F(x(s)) = s \cdot x(s), \tag{21}$$

ili

$$G(s(x)) + F(x) = s(x) \cdot x. \tag{22}$$

Provjerimo konzistentnost jednadžbi (14) i (21). Diferenciramo (21) po s te primijenimo lančano pravilo

$$\frac{dG(s)}{ds} + \underbrace{\frac{dF}{dx}}_{=s} \cdot \frac{dx}{ds} = \underbrace{\frac{ds}{ds}}_{=1} \cdot x(s) + s \cdot \frac{dx(s)}{ds} \tag{23}$$

$$\frac{dG(s)}{ds} + \cancel{s \cdot \frac{dx(s)}{ds}} = x(s) + \cancel{s \cdot \frac{dx(s)}{ds}} \tag{24}$$

$$\frac{dG(s)}{ds} = x(s). \tag{25}$$

$\square$

Analognim postupkom, uz diferenciranje po x, se iz (22) dobije da vrijedi

$$\frac{dF(x)}{dx} = s(x). \tag{26}$$

Pokazali smo da su F i G međusobno LT te simetrije koje vrijede između njih:

$$G(s) + F(x) = s \cdot x$$

i

$$\partial_s G = x \quad ; \quad \partial_x F = s.$$

2.2.2 LT u klasičnoj mehanici

Do sada smo navodili i dokazivali određene tvrdnje koje su općenite. Sve su primijenjive na određene probleme u fizici. Ono što nas zanima je kako iz Lagrangiana, uz korištenje LT, dobiti Hamiltonijan i obratno. U kojem su oni međusobnom odnosu?
U klasičnoj mehanici, Lagrangian L je LT Hamiltonijana H te obratno. Naime, znamo da vrijedi $L = L(q, \dot{q})$ i $H = H(q, p)$. Možemo pisati $L = L(\dot{q})$ i $H = H(p)$, gdje su $\dot{q}$ i p međusobno nezavisne varijable.
Pretpostavimo da nam je poznat $L(\dot{q})$. Uz uvjete iz definicije 3 možemo pisati

$$H(p) = p\dot{q} - L(\dot{q}). \tag{27}$$

Diferenciramo izraz (27) po $\dot{q}$ te koristimo da H ovisi samo o p

$$\underbrace{\frac{\partial H}{\partial \dot{q}}}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial \dot{q}}}_{=0}\dot{q} + p \cdot \underbrace{\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}}}_{=1} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{28}$$

$$p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{29}$$

Dobili smo jednadžbu koja ovisi o $\dot{q}$. Najjednostavniji slučaj za promatranje je slobodna čestica za koju vrijedi $U = 0$ iz čega slijedi

$$L = T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2. \tag{30}$$

Uvrštavanjem (30) u (29) te rješavanjem jednadžbe dobiva se

$$\begin{aligned} p - m\dot{q} &= 0 \\ p &= m\dot{q}. \end{aligned} \tag{31}$$

Dobili smo upravo očekivani izraz, tj. definiciju impulsa.
Kao i u matematičkom uvodu, može se pokazati da vrijedi obrat. Pretpostavimo da nam je poznat $H(p)$ pa iz definicije 3 slijedi

$$L(\dot{q}) = p\dot{q} - H(p). \tag{32}$$

Diferenciramo (32) po p tako da vrijedi $L = L(\dot{q})$

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial p}}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial p}}_{=1}\dot{q} + p \cdot \underbrace{\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}}_{=0} - \frac{\partial H}{\partial p} \tag{33}$$

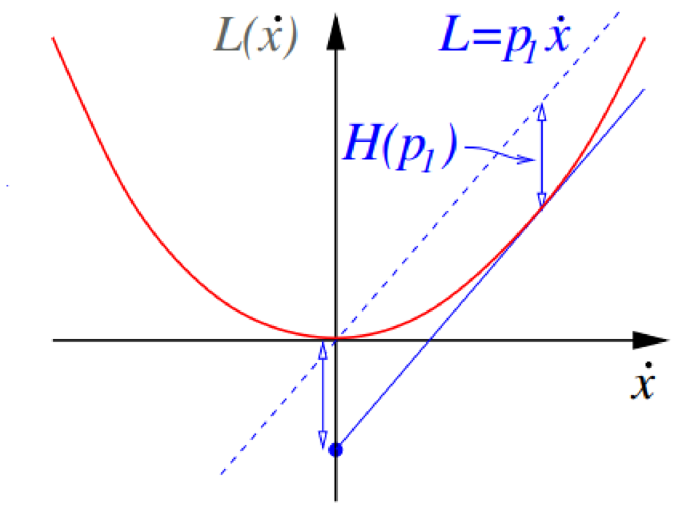
$$\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} = 0. \tag{34}$$

Za slobodnu česticu vrijedi

$$H = T = \frac{p^2}{2m}, \tag{35}$$

pa je

$$\dot{q} = \frac{p}{m}. \tag{36}$$



Slika 3: Grafički prikaz konveksne funkcije $L(\dot{q})$. [3]

Na temelju geometrijske interpretacije također dolazimo do željenih funkcija. Slike 2 i 3 daju istu informaciju, ali u slici 3 smo konkretizirali stvar za neku konveksnu funkciju koju u ovom slučaju nazivamo Lagrangian. Sa slike 3 vidljivo je da vrijedi $L = p_1\dot{q}$. Pretpostavimo da znamo $L(\dot{q})$ pa je nova funkcija $H(p_1)$, prema definiciji LT, jednaka maksimalnoj razlici između linije $p_1\dot{q}$ i krivulje $L(\dot{q})$, odnosno

$$H(p_1) \equiv \max_{\dot{q}} \left(p_1\dot{q} - L(\dot{q})\right). \tag{37}$$

U slučaju više varijabli, Lagrangian i Hamiltonijan su jednostavno, prema LT, određeni sa

$$H\left(p_i, q_i\right) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L\left(\dot{q}_i, q_i\right). \tag{38}$$

3 TEOREM OSTROGRADSKOG

3.1 Konstrukcija Hamiltonijana za sustave sa prvim derivacijama u vremenu

Iskaz teorema Ostrogradskog i fizikalni primjeri bazirani su na [4].

Neka je $L = L(q, \dot{q})$ pa jednadžba gibanja glasi

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0. \tag{39}$$

Definicija 4 (Nedegeneracija)**.** Neka je $L = L\left(q, \dot{q}, \ldots, q^{(N)}\right)$. Uvjet koji kaže da vrijedi $\frac{\partial L}{\partial q^{(N)}} \neq 0$ naziva se nedegeneracija.

Drugim riječima, uvjet koji govori da derivacija Lagrangiana eksplicitno ovisi o najvišoj derivaciji generalizirane koordinate u vremenu naziva se nedegeneracija.

U jednadžbi (39), kada je $N = 1$, to bi značilo da mora vrijediti $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \neq 0$.

Neka je L nedegeneriran. Pišemo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{q}) \neq 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

.

Uvedimo pokrate $f_1(\dot{q}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ i $g(q, \dot{q}) \equiv \frac{\partial L}{\partial q}$.

Derivacija za f_1 je

$$\frac{d}{dt}f_1(\dot{q}) = \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}} \cdot \ddot{q},$$

pa je

$$f_1'(\dot{q}) \cdot \ddot{q} - g(q, \dot{q}) = 0$$

$$\ddot{q} = \frac{g}{f_1'} = f(q, \dot{q}), \quad \forall f_1' \neq 0. \tag{40}$$

Upravo smo pokazali da za E - L jednadžbu, koja uključuje najviše prve derivacije, možemo zapisati $\ddot{q}$ kao funkciju od q i $\dot{q}$ ako i samo ako vrijedi uvjet nedegeneracije, tj. $f_1' \neq 0$. Diferencijalnu jednadžbu (40) možemo riješiti ako znamo početni položaj i početnu brzinu ili ako znamo dva početna položaja. Zahtijevaju se dva početna uvjeta što implicira postojanje dviju kanonskih koordinata u faznog prostoru (Q, P) koje su, prema definiciji,

$$Q \equiv q \quad \text{i} \quad P \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \tag{41}$$

Koristeći uvjet nedegeneracije te Legendreovu transformaciju pišemo

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}), \tag{42}$$

što znači da, zbog uvjeta nedegeneracije, možemo "izvući" $\dot{q}$ iz (42). Koristeći se definicijama iz (41) možemo pisati

$$\dot{q} = F(Q, P). \tag{43}$$

Iz LT znamo da možemo pisati, uz korištenje izraza (41) i (43)

$$\begin{aligned} H(Q, P) &\equiv P\dot{q} - L \\ &= PF(Q, P) - L(Q, F(Q, P)). \end{aligned} \tag{44}$$

Napišimo sada Hamiltonove kanonske jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
\dot{Q} \equiv \frac{\partial H}{\partial P} &\overset{(44)}{=} F(Q,P) + P\frac{\partial F}{\partial P} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial F}{\partial P} \\
&\overset{(41)}{=} F(Q,P) + \cancel{\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial P}} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial P}} \\
&= F(Q,P).
\end{aligned} \tag{45}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{P} \equiv -\frac{\partial H}{\partial Q} &\overset{(44)}{=} -P\frac{\partial F}{\partial Q} + \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial F}{\partial Q} \\
&\overset{(41)}{=} -\cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial F}{\partial Q}} + \frac{\partial L}{\partial q} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial F}{\partial Q}} \\
&\overset{(41)}{=} \frac{\partial L}{\partial Q}.
\end{aligned} \tag{46}
$$

Ako uvrstimo dobiveno u (39) vidimo da zaista vrijede E - L jednadžbe

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(P) - \dot{P} &= 0 \\
\dot{P} - \dot{P} &= 0 \\
0 &= 0.
\end{aligned}
$$

Primjer 1 (Harmonički oscilator za $N = 1$)**.** Na primjeru jednostavnog HO pokazati konzistentnost rješenja uz odabrane zamjene.

Lagrangian je

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Jednadžba HO je linearna diferencijalna jednadžba 2. reda

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Neka je poveznica starih i novih koordinata dana kao

$$X \equiv x \ \wedge \ P \equiv m\dot{x}.$$

Uz pretpostavku uvjeta nedegeneracije

$$P \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ \Rightarrow \ \dot{x} = F(X,P) \ \Rightarrow \ F(X,P) = \frac{P}{m},$$

pa je Hamiltonijan ($H = T + U$) jednak

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2.$$

Vidimo da $H(X, P)$ ima kvadratnu ovisnost i za X i za P što implicira da je ograničen (postoji minimum funkcije).

Kanonske jednadžbe su

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P}{m} = F(X, P) \quad \wedge \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -m\omega^2 X.$$

Provjerimo da E - L jednadžbe zaista vrijede tako da u njih uvrstimo dobiveno

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = m\dot{X} \equiv P$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial X} = -m\omega^2 X = \dot{P}$$

$$\Rightarrow \ \frac{d}{dt}(P) - \dot{P} = 0 \ \Rightarrow \ 0 = 0.$$

3.2 Konstrukcija Hamiltonijana za sustave sa drugim derivacijama u vremenu

Neka je $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$. E - L jednadžba tada je

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) = 0. \tag{47}$$

Zbog uvjeta nedegeneracije slijedi da $\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \neq 0$.

Rješenja jednadžbe (47) ovise o četiri početna uvjeta. Eksplicitno ćemo pokazati da je $q^{(4)}$ funkcija $q, .., \dddot{q}$, odnosno da vrijedi $q^{(4)} = f\left(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dddot{q}\right)$.

Neka je $A(\ddot{q}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}(\ddot{q})$ pokrata. Diferencirajući A dva puta po vremenu dobijemo

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} \cdot \frac{d\ddot{q}}{dt} = \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} \dddot{q} \tag{48}$$

$$\frac{d^2A}{dt^2} = \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} q^{(4)} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}}\right) \dddot{q}. \tag{49}$$

Koristeći činjenicu da obična i parcijalna derivacija međusobno komutiraju, drugi pribrojnik iz jednadžbe (49) pišemo kao

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ddot{q}}\left(\frac{dA}{dt}\right) &\overset{(48)}{=} \frac{\partial}{\partial \ddot{q}}\left(\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} \dddot{q}\right) \\ &= \frac{\partial^2 A}{\partial \ddot{q}^2} \dddot{q} + \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} \frac{\partial \dddot{q}}{\partial \ddot{q}} \\ &= \frac{\partial^2 A}{\partial \ddot{q}^2} \dddot{q}. \end{aligned} \tag{50}$$

Drugi pribrojnik iz (50) iščezava jer su $\ddot{q}$ i $\dddot{q}$ međusobno nezavisne varijable.

Uvrstimo dobiveno u (49)

$$\frac{d^2A}{dt^2} = \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} q^{(4)} + \frac{\partial^2 A}{\partial \ddot{q}^2} \dddot{q}, \tag{51}$$

što uvrstimo u E - L jednadžbu

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} q^{(4)} + \frac{\partial^2 A}{\partial \ddot{q}^2} \dddot{q} = 0.$$

Za $N = 1$ smo pokazali da prva dva pribrojnika gornje jednadžbe sadrže informaciju $\ddot{q} = f(q, \dot{q})$. Kod druga dva pribrojnika $\dddot{q}$ nalazi se u nazivniku što implicira, iz uvjeta nedegeneracije, da su ti članovi različiti od nule. Zbog toga, možemo podijeliti sve sa članom koji stoji uz $q^{(4)}$ (nazivnik će uvijek biti različit nuli) te zaključujemo

$$q^{(4)} = f\left(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dddot{q}\right). \tag{52}$$

Prema navedenom, možemo zaključiti da bi za $N = 3$ dobili diferencijalnu jednadžbu 6. reda ili, općenito, za vremenske derivacije reda N bismo dobili diferencijalnu jednadžbu $2N$-tog reda koja bi, prema tome, zahtijevala $2N$ početnih uvjeta.

Teorem 1 (Teorem Ostrogradskog)**.** Ako postoji Lagrangian koji sadrži vremenske derivacije 2. ili višeg, ali konačnog, reda te ako zadovoljava uvjet nedegeneracije, tada postoji najmanje jedan linearan član u impulsu u Hamiltonijanu sustava.

Dokaz. Dokazat ćemo teorem za $N = 2$ (za više derivacije dokaz se provodi analogno). Neka je $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$.
Za riješiti jednadžbu (52) potrebna su četiri početna uvjeta pa zato fazni prostor ima četiri koordinate. Odabir Ostrogradskog je

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_1 \equiv q \quad &; \quad P_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}, \\ Q_2 \equiv \dot{q} \quad &; \quad P_2 \equiv \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}. \end{aligned}$$

Iz uvjeta nedegeneracije te korištenja LT odredimo inverz od P_2

$$P_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \Rightarrow \ddot{q} = G\left(Q_1, Q_2, P_2\right). \tag{53}$$

Prema definiciji LT odredimo H kao

$$H\left(Q_1, Q_2, P_1, P_2\right) \equiv P_1 \dot{Q}_1 + P_2 \dot{Q}_2 - L, \tag{54}$$

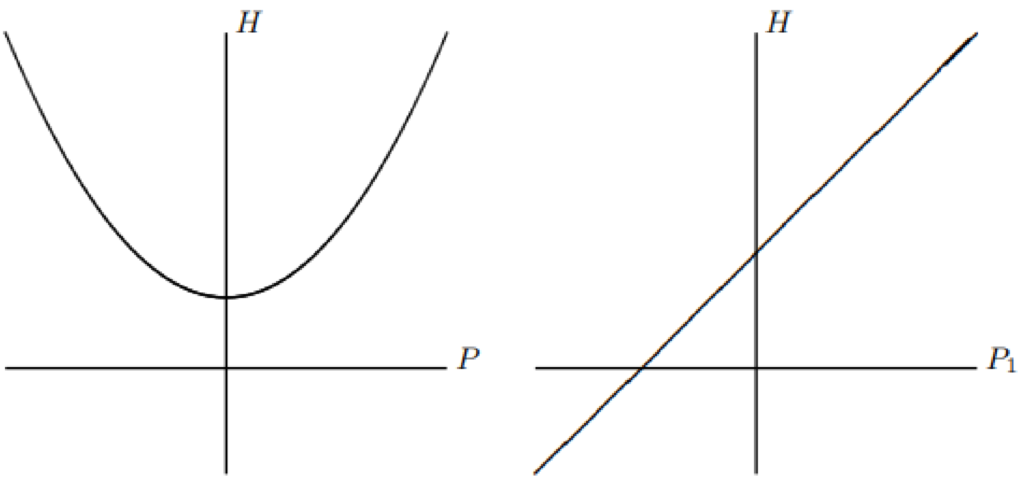
te uvrstimo potrebne odabire

$$H\left(Q_1, Q_2, P_1, P_2\right) = P_1 \cdot Q_2 + P_2 \cdot G\left(Q_1, Q_2, P_2\right) - L\left(Q_1, Q_2, G\left(Q_1, Q_2, P_2\right)\right). \tag{55}$$

Promatranjem jednadžbe (55) uočavamo da je prvi pribrojnik linearan u P_1 iz čega slijedi da je Hamiltonijan neograničen (ne postoji minimum ni maksimum) te je teorem time dokazan.

□

Na slici 4 dana je razlika izgleda Hamiltonijana za sustave sa prvim i drugim derivacijama u vremenu. Kada je H linearan postoji neograničenost (samim time i nestabilnost sustava) dok je za kvadratni H sustav stabilan.



Slika 4: Usporedba Hamiltonijana za odabrane smjerove u faznom prostoru. [5]

Nadalje, napišimo sve četiri Hamiltonove kanonske jednadžbe. Za $\dot{Q}_1$ samo prvi pribrojnik "preživi"

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial H}{\partial P_1} = Q_2. \tag{56}$$

$$\dot{Q}_2 = \frac{\partial H}{\partial P_2} = G(Q_1, Q_2, P_2) + \cancel{P_2 \frac{\partial G(Q_1, Q_2, P_2)}{\partial P_2}} - \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}}_{=P_2} \frac{\partial G(Q_1, Q_2, P_2)}{\partial P_2}} = G(Q_1, Q_2, P_2). \tag{57}$$

$$\dot{P}_2 = -\frac{\partial H}{\partial Q_2} = -P_1 - \cancel{\frac{\partial G}{\partial Q_2} P_2} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \frac{\partial G}{\partial Q_2}} = -P_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -P_1 + \frac{\partial L}{\partial Q_2}. \tag{58}$$

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial Q_1} = \cancel{-P_2 \frac{\partial G}{\partial Q_1}} + \frac{\partial L}{\partial q} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \frac{\partial G}{\partial Q_1}} = \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial Q_1}. \tag{59}$$

Uvjerimo se da, za takve odabire, vrijedi E - L jednadžba, odnosno da u jednadžbi

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) = 0 \tag{60}$$

moramo dobiti nulu s lijeve strane. Iz odabira Ostrogradskog za P_1 možemo izraziti

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial Q_2} = P_1 + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)}_{\dot{P}_2} = P_1 + \dot{P}_2, \tag{61}$$

te uvrštavanjem (59) i (61) u (60) dobivamo

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 - \frac{d}{dt}\left(\dot{P}_2 + P_1\right) + \ddot{P}_2 = 0 \\ \dot{P}_1 - \ddot{P}_2 - \dot{P}_1 + \ddot{P}_2 = 0 \\ 0 = 0. \end{aligned}$$

Dokazali smo da vrijedi E - L jednadžba za odabir Ostrogradskog.

3.2.1 Primjer sustava sa drugim derivacijama u vremenu

U prethodnom poglavlju pokazali smo linearnu nestabilnost u Hamiltonijanu sustava. Na sljedećem primjeru možemo vidjeti ilustraciju nestabilnosti sustava, kada on uključuje članove sa višim derivacijama u vremenu.

Primjer 2 (Harmonički oscilator za $N = 2$)**.** Neka je dan nedegeneriran Lagrangian za HO kao

$$L = -\frac{\alpha m}{2\omega^2}\ddot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2, \tag{62}$$

gdje je α parametar odstupanja u odnosu na jednostavan HO. Radi jednostavnosti zanemarujemo dimenzionalne veličine. Neka su $\alpha = 2$ i $\omega = 1$ te neka su početni uvjeti

$$x(0) = 1 \quad ; \quad \dot{x}(0) = 1 \quad ; \quad \ddot{x}(0) = 2 \quad ; \quad \dddot{x}(0) = 3.$$

Odrediti E - L jdbu, rješenje gibanja te dokazati da se u rješenju za Hamiltonijan dobiva linearan član u impulsu.

Vidimo da u izrazu (62) imamo vremenske derivacije 2. reda te jednu nezavisnu varijablu, x. Izračunamo potrebne derivacije za E - L jednadžbu

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -m\omega^2 x$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = -\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -m\ddot{x}$$

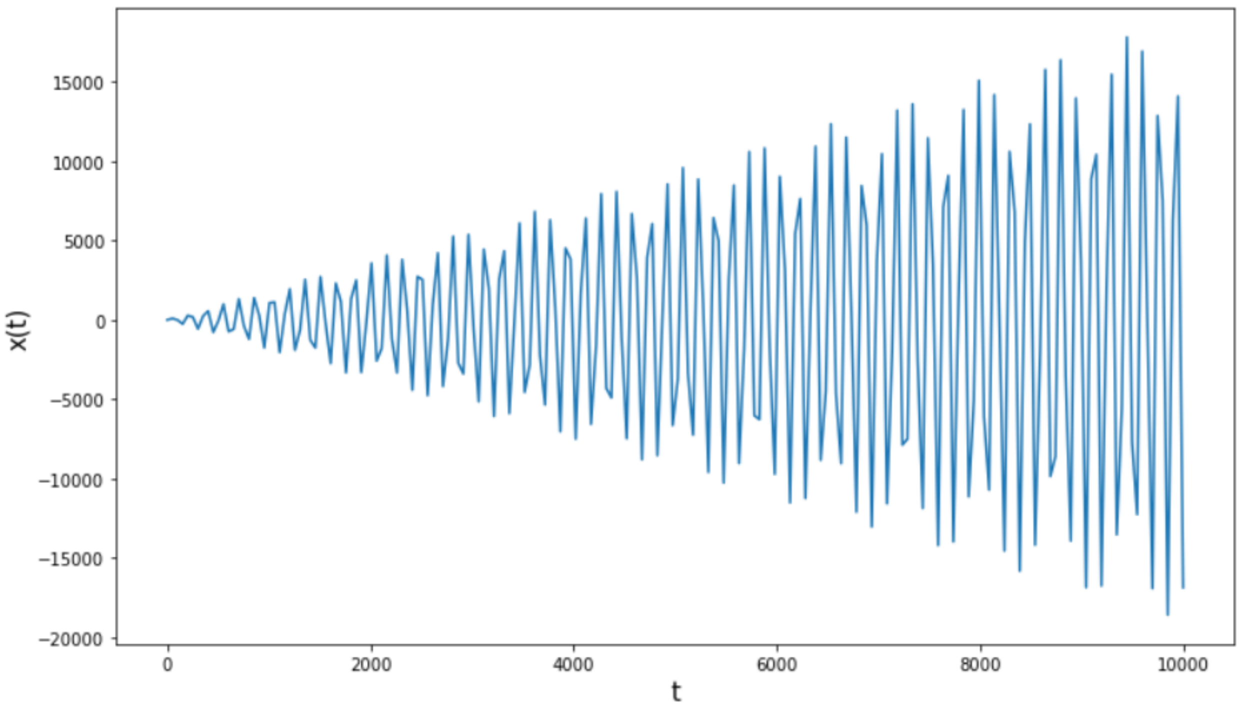
$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(-\frac{\alpha m}{\omega^2}\ddot{x}\right) = -\frac{\alpha m}{\omega^2}x^{(4)}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\alpha}{\omega^2}x^{(4)} + \ddot{x} + \omega^2 x\right) = 0.$$

Rješenje ove linearne diferencijalne jednadžbe 4. reda, uz dane početne uvjete, je

$$x(t) = \left(1 - \frac{5t}{4}\right)\cos(\sqrt{2}t) + \left(\sqrt{2}t + \frac{9\sqrt{2}}{8}\right)\sin(\sqrt{2}t).$$

Na slici 5 vidimo da rješenja, za proizvoljan t, nemaju stabilnu ovisnost o vremenu.



Slika 5: Graf ovisnosti položaja o vremenu za proizvoljan bezdimenzionalan $t \in [0, 10000]$.

Iz odabira Ostrogradskog izračunaju se P_1 i P_2

$$P_1 = m\dot{x} - \left(-\frac{\alpha m}{\omega^2}\ddot{x}\right) = m\dot{x} + \frac{\alpha m}{\omega^2}\dddot{x},$$

$$\implies \dddot{x} = \frac{\omega^2 P_1 - m\omega^2 X_2}{\alpha m}.$$

$$P_2 = -\frac{\alpha m}{\omega^2}\ddot{x} \implies \ddot{x} \equiv G = -\frac{\omega^2 P_2}{\alpha \cdot m},$$

pa je ukupan Hamiltonijan sustava

$$H = P_1 X_2 - \frac{\omega^2}{\alpha m} P_2^2 - \left(-\frac{\alpha m}{2\omega^2}\frac{\omega^4 P_2^2}{\alpha^2 m^2} + \frac{m}{2}X_2^2 - \frac{m\omega^2}{2}X_1^2\right)$$

$$\implies H = P_1 X_2 - \frac{\omega^2}{2\alpha m}P_2^2 - \frac{m}{2}X_2^2 + \frac{m\omega^2}{2}X_1^2.$$

Hamiltonijan sadrži u sebi linearan član impulsa čime smo, na konkretnom primjeru, dokazali teorem Ostrogradskog.

3.3 Konstrukcija Hamiltonijana za sustave sa N - tim derivacijama u vremenu

Neka je $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, ..., q^N)$. U prethodnom poglavlju pokazali smo da vrijedi

$$\sum_{i=0}^{N}(-1)^i \frac{d^i}{dt^i}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(i)}}\right) = 0. \tag{63}$$

Ako je L nedegeneriran znači da iz (63) slijedi diferencijalna jednadžba $2N$ - tog reda što implicira potrebu za $2N$ početnih uvjeta. Odabir Ostrogradskog je

$$Q_i \equiv q^{(i-1)} \quad ; \quad P_i \equiv \sum_{j=i}^{N}\left(-\frac{d}{dt}\right)^{j-i}\frac{\partial L}{\partial q^{(j)}}. \tag{64}$$

Kao i ranije, ako znamo L iskoristimo definiciju Legendreove transformacije za napisati Hamiltonijan H

$$\begin{aligned} H &\equiv \sum_{i=1}^{N} P_i q^{(i)} - L \\ &= P_1 \dot{q} + P_2 \ddot{q} + \ldots + P_{N-1} q^{(N-1)} + P_N q^{(N)} - L(q, \dot{q}, \ddot{q}, ..., q^N) \\ &= P_1 Q_2 + P_2 Q_3 + \cdots + P_{N-1} Q_N + P_N K - L\left(Q_1, \ldots, Q_N, K\right), \end{aligned} \tag{65}$$

gdje smo, kao i za $N = 2$, zbog uvjeta nedegeneracije napravili inverz

$$P_N = \frac{\partial L}{\partial q^{(N)}} \;\; \Rightarrow \;\; q^{(N)} \equiv K\left(Q_{1,...}, Q_N, P_N\right). \tag{66}$$

Važno je za primijetiti da se u jednadžbi (65) počinje od Q_2 jer, koristeći izraz za H, trebaju nam samo oni Q - ovi koji u sebi sadrže derivacije.

3.4 Negativna kinetička energija

Ovdje ćemo pokazati još jednu interpretaciju teorema koja je bazirana na [6].
Neka je generalizirana koordinata ϕ. Najlakše je za promotriti Lagrangian 2. reda pa akciju sustava pišemo kao

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}t \frac{1}{2} \ddot{\phi}^2, \tag{67}$$

gdje je $L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi) = \frac{1}{2}\ddot{\phi}^2$. E - L jednadžba je

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{\phi}}\right) = 0. \tag{68}$$

Nadalje, uvodimo pomoćnu varijablu ψ koja je definirana kao $\psi \equiv \ddot{\phi}$. Iskoristimo da vrijedi

$$\frac{1}{2}(\ddot{\phi} - \psi)^2 = \frac{1}{2}\ddot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\psi^2 - \ddot{\phi}\psi = 0, \tag{69}$$

iz čega izrazimo prvi pribrojnik, napravimo supstitucije $u = \psi$ i $dv = \ddot{\phi}$ te, uz parcijalnu integraciju, uvrstimo u (68)

$$S[\phi, \psi] = \int \mathrm{d}t \left(\ddot{\phi}\psi - \frac{1}{2}\psi^2\right) = \int \mathrm{d}t \left(-\dot{\phi}\dot{\psi} - \frac{1}{2}\psi^2\right) + [\dot{\phi}\psi], \tag{70}$$

gdje smo posebno izdvojili član u uglatoj zagradi iz razloga što on ne doprinosi jednadžbama gibanja (one su izvedene iz principa najmanje akcije) pa jedino što gledamo je integrand od S. Sada možemo napisati novi Lagrangian kojega nazivano ekvivalentni Lagrangian

$$\tilde{L}(\dot{\phi}, \phi, \dot{\psi}, \psi) = -\dot{\phi}\dot{\psi} - \frac{1}{2}\psi^2 \tag{71}$$

Raspisivajući E - L jednadžbe za ϕ i ψ potvrđujemo da opisuju isti sustav, odnosno da su jednake

$$\begin{aligned} \phi: \quad & \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \phi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = \ddot{\psi} = 0, \\ \psi: \quad & \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \psi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) = \psi - \ddot{\phi} = 0. \end{aligned} \tag{72}$$

Nadalje, definirajmo nove varijable kao

$$\Phi \equiv \frac{\phi - \psi}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \Psi \equiv \frac{\phi + \psi}{\sqrt{2}}, \tag{73}$$

pa ih uvrstimo u (72)

$$\tilde{L}(\dot{\Phi}, \Phi, \dot{\Psi}, \Psi) = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\Psi}^2 - \frac{1}{4}(\Phi - \Psi)^2, \tag{74}$$

iz čega vidimo da je $\dot{\Psi}$ doprinos negativne kinetičke energije. Kanonske jednadžbe su

$$P_\Phi = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi} \quad ; \quad P_\Psi = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{\Psi}} = -\dot{\Psi}. \tag{75}$$

Izrazimo brzine u terminima impulsa pa je Hamiltonijan

$$\begin{aligned} H &= P_\Phi^2 - P_\Psi^2 - \left[\frac{1}{2}P_\Phi^2 - \frac{1}{2}P_\Psi^2 - \frac{1}{4}(\Phi - \Psi)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}P_\Phi^2 - \frac{1}{2}P_\Psi^2 + \frac{1}{4}(\Phi - \Psi)^2. \end{aligned} \tag{76}$$

Dobili smo negativan kinetički član od Ψ. Ukupna energija sustava biti će očuvana zbog načina na koji su Φ i Ψ povezani. Konkretnije, Φ može dobiti proizvoljno veliki doprinos u kinetičkoj energiji.

4 ZAKLJUČAK

Prva zanimljiva stvar koju smo pokazali, a nužna je za daljnja razmatranja u radu, je alternirajući predznak u E - L jednadžbama koji ovisi o tome kojeg je reda vremenska derivacija člana koji se pojavljuje u Lagrangianu. Uveli smo pojam Legendreove transformacije na način da smo prvo prezentirali njenu teorijsku podlogu te, zatim, dali konkretnu primjenu kako iz danog Hamiltonijana dobiti Lagrangian i obratno.
Koristeći uvjet nedegeneracije kao nužan uvjet u razmatranju teorema Ostrogradskog, dali smo tri različite interpretacije teorema. Pokazali smo kako izgledaju jednadžbe gibanja za sustave sa višim derivacijama u vremenu, demonstrirali teorem Ostrogradskog za sustave sa 2. derivacijama u vremenu u Lagrangianu i pokazali njegovu konstrukciju za N-te derivacije. Pokazali smo kako se nestabilnost manifestira na rješenjima jednostavnog sustava sa višim derivacijama u vremenu, i konačno, pokazali smo kako kinetička energija u takvom sustavu može u nekim stupnjevima slobode dobiti proizvoljno veliku vrijednost. Nužno je za naglasiti da ako uvedemo određena ograničenja možemo izaći iz gore navedenih problema i to, prema [6], na tri različita načina; ako kažemo da su derivacije beskonačnog reda, ako proglasimo Lagrangian degeneriranim te ako imamo samo jednu vremensku derivaciju u Lagrangianu.
Za kraj treba reći da je područje teorije viših derivacija itekako zastupljeno u fizici te se fizičari njome aktivno bave. Takve teorije su najzastupljenije u području teorije polja, poput [7].

Literatura

[1] Šime Ungar, Matematička analiza 3, 3. izdanje, Prirodoslovno matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu (2002)

[2] R. K. P. Zia, Edward F. Redish, Susan R. McKay, Making Sense of the Legendre Transform, arXiv:0806.1147 (2009)

[3] Mark Alford, Legendre Transforms, https://web.physics.wustl.edu/alford/physics/Legendre introduction.pdf (2019)

[4] R. P. Woodard, Ostrogradsky theorem on Hamiltonian instability, arXiv:1506.02210 [hep-th] (2015)

[5] Floris Harmanni, Higher Order Lagrangians for classical mechanics and scalar fields, https://fse.studenttheses.ub.rug.nl/14149/1/HigherOrderLagrangians.pdf (2016)

[6] Eleonora Svanberg, Theories with higher-order time derivatives and the Ostrogradsky ghost, https://diva-portal.org/smash/get/diva2:1667027/FULLTEXT01.pdf (2022)

[7] Marco Crisostomi, Remko Klein and Diederik Roest, Higher Derivative Field Theories: Degeneracy Conditions and Classes, arXiv:1703.01623 [hep-th] (2017)