

# Optička koherentnost

---

Srdojević, Lara

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:194:888971>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-27**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Physics - PHYRI Repository](#)





**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
FAKULTET ZA FIZIKU**

**Studijski program Fizika**

**Lara Srdojević**

**OPTIČKA KOHERENTNOST**

**Završna preddiplomska radnja**

**Mentor: Velimir Labinac**

**Rijeka, 2022**

# Sadržaj

<b>1. UVOD</b> .....	1
<b>2. TEORIJA PARCIJALNE KOHERENTNOSTI</b> .....	2
<b>2.1. Koherentnost i interferencija</b> .....	2
<b>2.1.1. Zakon interferencije</b> .....	2
<b>2.1.2. Youngov eksperiment</b> .....	5
<b>2.2. KORELACIJSKA ANALIZA</b> .....	6
<b>2.2.1. Zakon interferencije za parcijalno koherentnu svjetlost</b> .....	6
<b>2.2.2. Vidljivost interferencijskih uzoraka</b> .....	9
<b>3. KOHERENTNOST I ŠIRINA FREKVENTNOG POJASA IZVORA</b> .....	11
<b>3.1. Koherentno vrijeme i koherentna duljina</b> .....	11
<b>3.2. Spektar snage</b> .....	14
<b>4. KOHERENTNOST I DIMENZIJE IZVORA</b> .....	17
<b>4.1. Transverzalna i longitudinalna koherentnost</b> .....	17
<b>4.2. Prošireni izvor</b> .....	19
<b>4.2.1. Transverzalna koherentna širina i koherentno područje</b> .....	19
<b>4.2.2. Youngov eksperiment s proširenim izvorom</b> .....	22
<b>5. PROPAGACIJA KORELACIJE</b> .....	25
<b>5.1. Valne jednadžbe</b> .....	25
<b>5.2. Propagacija korelacije s različitih tipova površina</b> .....	26
<b>5.3. Van Cittert-Zernikeov teorem</b> .....	28
<b>6. ZAKLJUČAK</b> .....	33
<b>LITERATURA</b> .....	34

## SAŽETAK

Kako bi svjetlost proizvodila interferencijske uzorke u tipičnom eksperimentu s dvije pukotine, ona mora biti koherentna na pukotinama. U prirodi čista koherentnost ne postoji, ona se u teoriji interferencije javlja jer se matematički najlakše baviti ekstremima, ili potpuno koherentnom ili nekoherentnom svjetlošću. Teorija optičke koherentnosti stavlja naglasak na parcijalnu koherentnost te proučava ovisnost koherentnosti svjetlosti o karakteristikama izvora i dane situacije. Godine 1665. F. M. Grimaldi je proveo interferencijski eksperiment s dvije pukotine sa Suncem kao primarnim izvorom. Eksperiment je propao jer je Sunčev disk čiji je kutni promjer od 32 lučne minute, bio prevelik pa svjetlost nije imala dovoljno visok stupanj prostorne koherentnosti da zadovoljavajuće simultano obasja obje pukotine. Sunčev promjer je trebao imati tek nekoliko lučnih minuta da se ti uvjeti zadovolje. Thomas Young ponovio je njegov eksperiment 140 godina kasnije, ali je svjetlost najprije propustio kroz malu pukotinu koja je služila kao novi primarni izvor i interferencijski uzorci pojavili su se na udaljenom zaslonu. Godine 1860. E. Verdet je pokazao da je Grimaldijev eksperiment ipak moguć i da primarni izvor koji se smatrao nekoherentnim, poput Sunca, ipak može proizvoditi pruge kad obasjava dvije međusobno bliske pukotine, no one moraju biti na pravom razmaku.

Ovaj rad proučava uzroke ishoda tih eksperimenata koji su posljedica činjenice da se koherentnost svjetlosti mijenja u procesu širenja ili propagacije svjetlosti. U radu je dan pregled teorije optičke koherentnosti u terminima korelacijske analize drugog reda. Proučavanje koherentnosti doprinosi boljem razumijevanju optičkih poremećaja, a primjene pronalazi u područjima kao što su zvjezdana interferometrija i medicina.

**Ključne riječi:** koherentnost, interferencija, Youngov eksperiment, parcijalna koherentnost, kvazimonokromatska svjetlost, korelacija, stupanj koherentnosti, vidljivost

## 1. UVOD

Teorija optičke koherentnosti je grana fizike koja proučava fluktuacije elektromagnetskih polja i korelaciju između tih fluktuacija u dvije ili više točaka vremena i prostora, te na taj način povezuje valnu teoriju sa statistikom. Tema se još i danas aktivno istražuje, a postavila je i temelje kvantne optike. Ovaj rad bavi se pregledom teorije optičke koherentnosti ograničene na korelaciju drugog reda. Potpuna koherentnost i nekoherentnost polja dva su ekstrema optičke koherentnosti dok ova teorija stavlja naglasak upravo na domenu između ekstrema, a to je parcijalne koherentnost. Kako se koherentnost može promatrati kao sposobnost svjetlosti da proizvodi interferencijske uzorke glavna podloga teorije su efekt interferencije i Youngov eksperiment. Efektima optičke koherentnosti se u ovom radu pristupa sa stajališta korelacijske analize koja elektromagnetska polja tretira kao stohastičke ili slučajne procese, dok je svjetlost tretirana kao kvazimonokromatski poremećaj pošto se svjetlost zapravo uvijek sastoji od konačnog pojasa frekvencija. Rad je osmišljen tako da je na početku predstavljena veza koherentnosti i interferencije te način opisivanja kvazimonokromatskih poremećaja uz koherentno vrijeme i duljinu kao njihove glavne osobine. Zatim je dan uvod u korelacijsku analizu koja je glavni alat u opisu parcijalno koherentne svjetlosti i daje način kvantificiranja efekata koherentnosti. Rad se nadalje, bavi ovisnošću koherentnosti svjetlosti o karakteristikama izvora i dane situacije gdje odvojeno promatra prostornu i vremensku koherentnost. Činjenica da i međusobno nekoherentni izvori mogu proizvoditi interferencijski uzorak, posljedica je propagacijskih zakona koje korelacija poštuje i koji potvrđuju da prostorna i vremenska koherentnost nisu neovisne pojave, a oni su tema posljednjeg poglavlja. Koherentnost svjetlosti se povećava kako ona putuje dalje od izvora pa je jedan od ciljeva ovog rada i ukazati na činjenicu da je upotreba izraza koherentni ili nekoherentni izvor neprikladna, već se treba govoriti da sama svjetlost jest ili nije koherentna.

## 2. TEORIJA PARCIJALNE KOHERENTNOSTI

### 2.1. Koherentnost i interferencija

Kod proučavanja optičke koherentnosti jedna od najvažnijih pojava jest interferencija jer se koherentnost može promatrati kao sposobnost svjetlosti da proizvodi interferencijske uzorke. Interferenciju je najbolje promatrati pomoću Youngovog eksperimenta pa je važno razumjeti njegove rezultate u ovisnosti o promjeni osnovnih parametara eksperimenata iz kojih je moguće izvesti teoriju optičke koherentnosti. Interferencija valova je međudjelovanje dvaju ili više valova koji prolaze kroz istu točku prostora te kao rezultat tvore novi val. Uvjet za nastanak interferencije jest da dva poremećaja moraju biti međusobno koherentna, što znači da zadržavaju konstantnu razliku u fazi. Koherentnost je dakle, mjera korelacije odnosno povezanosti između dva poremećaja.

#### 2.1.1. Zakon interferencije

Interferencija se bazira na načelu linearne superpozicije elektromagnetskih polja; resultantni poremećaj u točki prostora je vektorska ili algebarska suma individualnih valova koji tvore poremećaj. Treba napomenuti da se kod valova velikih amplituda javlja nelinearnost i načelo ili princip superpozicije ne može se upotrijebiti. Princip superpozicije je posljedica činjenice da sve komponente magnetskog i električnog polja zadovoljavaju trodimenzionalnu diferencijalnu valnu jednadžbu koja je linearna pa je njeno ukupno rješenje linearna kombinacija individualnih rješenja, a princip superpozicije za električno polje u matematičkom obliku glasi:

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots \quad (2-1)$$

gdje je  $\mathbf{E}_P$  ukupno polje u točki prostora P,  $\mathbf{E}_1$  polje koje u toj točki stvara izvor 1,  $\mathbf{E}_2$  polje koje u toj točki stvara izvor 2 i tako dalje. Proučavanju interferencije bolje je pristupiti u terminima intenziteta nego u terminima električnog polja svjetlosti jer ono jako varira u vremenu<sup>1</sup> pa je njegova vrijednost nepraktična za detekciju.

<sup>1</sup>Električno polje vidljive svjetlosti varira od  $4,3 \cdot 10^{14}$  Hz do  $7,5 \cdot 10^{14}$  Hz [1].

U realnom slučaju interferencije, amplitude i faze valova, pa zato i intenzitet u točki prostora, nasumično variraju u vremenu te se za vrijednost intenziteta u danoj točki prostora uzima njegov vremenski prosjek. Kad je svjetlost proizvedena od strane toplinskog izvora te fluktuacije se javljaju uglavnom jer se polje sastoji od velikog broja doprinosa koji su međusobno neovisni pa se njihova superpozicija može tretirati samo u statističkim terminima. Zato teorija optičke koherentnosti povezuje valnu teoriju sa statistikom. Vremenski prosjek funkcije definira se formulom:

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (2-2)$$

Intenzitet nastao u točki promatranja P od dvaju izvora koja generiraju polja  $\mathbf{E}_1$  i  $\mathbf{E}_2$  tada glasi:

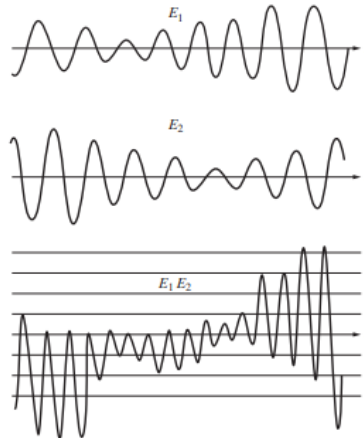
$$\begin{aligned} I_p &= \langle \mathbf{E}_p \mathbf{E}_p^* \rangle = \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)(\mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2^*) \rangle \\ &= \langle |\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2 + 2\text{Re}(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*) \rangle \end{aligned} \quad (2-3)$$

gdje  $\text{Re}$  označava realni dio kompleksnog broja. Uz pretpostavku da valovi imaju istu ravninu polarizacije i da propagiraju u istom smjeru moguće ih je opisati samo jednom komponentom električnog polja pa se poremećaj reprezentira skalarnom funkcijom, te uz pretpostavku da su sve vrijednosti stacionarne izraz (2-3) postaje:

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\text{Re} \langle E_1 E_2^* \rangle \quad (2-4)$$

gdje su  $I_1 = \langle |E_1|^2 \rangle$  i  $I_2 = \langle |E_2|^2 \rangle$  intenziteti u toj točki prostora koji bi postojali kad bi samo jedan od izvora bio prisutan. Izraz (2-4) poznat je kao zakon interferencije, a njegov zadnji član naziva se interferencijski član koji sugerira da ukupni intenzitet u točki prostora može biti veći, manji ili jednak sumi intenziteta nastalih od pojedinačnog izvora. Ukoliko je svjetlost monokromatska i oba polja imaju istu frekvenciju, resultantni intenzitet u točki promatranja ovisi samo o njihovoj faznoj razlici u toj točki. Ukoliko su valovi u fazi, oni će rasti i padati zajedno, a umnožak  $E_1 E_2^*$  bit će veći od nule za sve vrijednosti  $t$ , te će ukupni intenzitet biti veći od sume intenziteta nastalih od pojedinačnih izvora. Ukoliko su valovi potpuno van faze, dok jedan pada drugi će rasti, odnosno, dok je jedan negativan drugi je pozitivan,  $E_1 E_2^*$  će uvijek biti manji od nule pa će ukupni intenzitet biti manji od sume intenziteta nastalih od pojedinačnih izvora. U oba slučaja dva poremećaja su koherentna jer zadržavaju konstantnu razliku u fazi, umnožak  $E_1 E_2^*$  oscilira u vremenu no uvijek je, ili pozitivan ili negativan. Ukoliko poremećaji ne zadržavaju konstantnu razliku u fazi bit će

nekoherentni, interferencijski član bit će jednak nuli te interferencije i uzoraka neće biti. Ukoliko je svjetlost kvazimonokromatska,  $E_1 E_2^*$  će varirati u vremenu prelazeći iz negativnih u pozitivne vrijednosti kao što je prikazano na slici 2.1.



Slika 2.1. Umnožak električnih polja generiranih od strane dvaju kvazimonokromatskih izvora u ovisnosti o vremenu. (preuzeto iz literature [1])

Interferencijski član koji je usrednjen na vremenskom intervalu  $T$  koji je dug naspram perioda valova, također će težiti prema nuli. Kvazimonokromatska svjetlost je sačinjena od valnih paketa različitih faza i čini gotovo sinusoidalan poremećaj iako frekvencija lagano varira oko neke srednje vrijednosti. Prosječni valni paket koji ju sačinjava, postoji tijekom vremena  $\tau_0$  koje se zove koherentno vrijeme, a dano je recipročnom vrijednošću širine frekventnog pojasa svjetlosti. Duljina nepromijenjenog valnog oblika naziva se koherentna duljina, a njena veza s koherentnim vremenom dana je sa  $l_c = \tau_0 c$ , gdje je  $c$  brzina svjetlosti. Kvazimonokromatski poremećaj ilustriran je na slici 2.2.



Slika 2.2. Ovisnost električnog polja kvazimonokromatske svjetlosti o vremenu. Kvazimonokromatska svjetlost čini gotovo sinusoidalan poremećaj. (preuzeto iz literature [1])

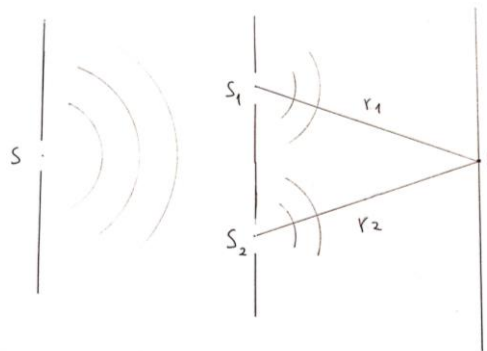
Takvi izvori svjetlosti zadržavaju konstantnu razliku u fazi samo tijekom vremena  $\tau_0$ . No kako korelacija između poremećaja ipak postoji tijekom tog vremena, interferencijski uzorak će postojati no slabije vidljivosti. Za takve poremećaje kaže se da su djelomično ili parcijalno



koherentni. Daljnji cilj ovog rada jest doći do zaključka o tome kako koherentnost svjetlosti ovisi o karakteristikama izvora.

### 2.1.2. Youngov eksperiment

Youngov eksperiment služi za promatranje efekata interferencije. U tom eksperimentu svjetlost potječe od primarnog izvora (pukotine S) te dalje prolazi kroz pukotine  $S_1$  i  $S_2$  koje služe kao sekundarni izvori, a kasnije se zrake ponovno spajaju da tvore interferencijski uzorak na udaljenom zaslonu. Pukotine  $S_1$  i  $S_2$  su od točke promatranja udaljene za  $r_1$  i  $r_2$  respektivno. Ukoliko je S idealizirani točkasti monokromatski izvor, poremećaji koji izlaze iz  $S_1$  i  $S_2$  će zadržavati konstantnu razliku u fazi, odnosno bit će međusobno koherentni i generirat će interferencijski uzorak pruga na udaljenom zaslonu. Ukoliko na  $S_1$  i  $S_2$  upada svjetlost koja potječe iz separiranih toplinskih izvora korelacije među poremećajima neće biti, odnosno, poremećaji će biti nekoherentni i neće generirati interferencijski uzorak. Zato je sposobnost generiranja interferencijskog uzorka dobra mjera koherentnosti. Postav Youngovog eksperimenta skiciran je na slici 2.3.



Slika 2.3. Skica postava Youngovog eksperimenta.

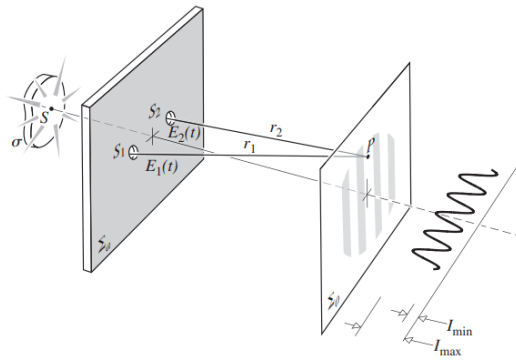
## 2.2. KORELACIJSKA ANALIZA

U nadolazećim poglavljima teoriji koherentnosti se pristupa sa stajališta korelacijske analize. Korelacijska analiza se u suštini svodi na usporedbu dva signala u svrhu utvrđivanja stupnja do kojeg su ti signali slični. Ona se provodi na temelju matematičkih tehnika iz teorije stohastičkih procesa. Kad je u pitanju analiziranje prosječnih intenziteta, u obzir se uzima korelacija drugog reda koja opisuje vezu između fluktuacija svjetlosti u dvije točke prostora i vremena. Ovo potpoglavlje se bavi predstavljanjem te vrste korelacija na primjeru analize interferencijskog eksperimenta za parcijalno koherentnu svjetlost. U cijelom radu se pretpostavlja da je svjetlost makroskopski stabilna, odnosno, da nema fluktuacija na makroskopskoj vremenskoj i prostornoj skali, ili u terminima teorije nasumičnih procesa, da fluktuacije mogu biti reprezentirane stacionarnim nasumičnim procesom čiji su srednji period i korelacijsko vrijeme puno kraći od intervala na kojem se obavlja promatranje.

### 2.2.1. Zakon interferencije za parcijalno koherentnu svjetlost

Neka je primarni izvor svjetlosti u Youngovom eksperimentu kvazimonokromatski pa stoga poremećaji u  $S_1$  i  $S_2$  nisu potpuno koherentni i neka taj izvor generira kompleksno električno polje  $\tilde{E}(\mathbf{r}, t)$ <sup>1</sup>. Iako je fizikalno elektromagnetsko polje realno, u korelacijskoj analizi je korisno koristiti kompleksne analitičke signale povezane s pripadajućim realnim signalima. Na slici 2.4. je prikazan nesavršeni izvor svjetlosti kao prošireni izvor koji će se dublje analizirati kasnije u radu.

<sup>1</sup>Tilda označava kompleksnu veličinu.



Slika 2.4. Postav Youngovog eksperimenta sa kvazimonokromatskim proširenim primarnim izvorom. (preuzeto iz literature [1])

Neka su polja u prostornim točkama  $S_1$  i  $S_2$  jednaka  $\widetilde{E}_1(t)$  i  $\widetilde{E}_2(t)$ , respektivno. Zaslona na kojem se intenzitet promatra je na udaljenosti od zaslona s pukotinama puno većoj od valne duljine svjetlosti. Izraz za električno polje u točki P tada glasi:

$$\widetilde{E}_P(t) = \widetilde{K}_1 \widetilde{E}_1(t - t_1) + \widetilde{K}_2 \widetilde{E}_2(t - t_2) \quad (2-5)$$

Uz  $t_1 = \frac{r_1}{c}$ ,  $t_2 = \frac{r_2}{c}$ . Vrijednosti  $\widetilde{K}_1$  i  $\widetilde{K}_2$  zovu se propagatori te ovise o veličini i relativnoj lokaciji pukotina u odnosu na P, a matematički opisuju promjene u polju nastale zbog prolaska svjetlosti kroz pukotinu i poprimaju čisto imaginarne vrijednosti. Polje generirano od strane bilo kojeg realnog izvora svjetlosti mora biti tretirano kao nasumična funkcija položaja i vremena koja se opisuje statistički pomoću distribucije vjerojatnosti. Skup svih mogućih realizacija funkcije naziva se ansambl te je potrebno naći prosjek funkcije po ansamblu. Pod pretpostavkom da su sve vrijednosti stacionarne i ergodičke<sup>1</sup>, usrednjenje po ansamblu postaje vremenski neovisno i može se zamijeniti pripadajućim usrednjenjem po vremenu. Intenzitet u točki P usrednjen na vremenskom intervalu  $T \gg \tau_0$  glasi:

$$I_p = \langle \widetilde{E}_P(t) \widetilde{E}_P^*(t) \rangle = \widetilde{K}_1 \widetilde{K}_1^* \langle \widetilde{E}_1(t - t_1) \widetilde{E}_1^*(t - t_1) \rangle + \widetilde{K}_2 \widetilde{K}_2^* \langle \widetilde{E}_2(t - t_2) \widetilde{E}_2^*(t - t_2) \rangle + \widetilde{K}_1 \widetilde{K}_2^* \langle \widetilde{E}_1(t - t_1) \widetilde{E}_2^*(t - t_2) \rangle + \widetilde{K}_1^* \widetilde{K}_2 \langle \widetilde{E}_1^*(t - t_1) \widetilde{E}_2(t - t_2) \rangle \quad (2-6)$$

<sup>1</sup>Za proces se kaže da je ergodički ako su svi vremenski prosjeci koji pripadaju različitim realizacijama ansambla međusobno jednaki i jednaki prosjeku funkcije po ansamblu.

Zbog svojstva stacionarnosti moguće je još pomaknuti ishodište vremena uz odabir  $\tau = t_2 - t_1$  pa prva dva izraza u gornjem izrazu prelaze u  $\langle \widetilde{E}_1(t) \widetilde{E}_1^*(t) \rangle \equiv I_{s1}$  i  $\langle \widetilde{E}_2(t) \widetilde{E}_2^*(t) \rangle \equiv I_{s2}$  respektivno. Nadalje vrijedi:

$$\begin{aligned} & \widetilde{K}_1 \widetilde{K}_2^* \langle \widetilde{E}_1(t - t_1) \widetilde{E}_2^*(t - t_2) \rangle + \widetilde{K}_1^* \widetilde{K}_2 \langle \widetilde{E}_1^*(t - t_1) \widetilde{E}_2(t - t_2) \rangle \\ &= \widetilde{K}_1 \widetilde{K}_2^* \langle \widetilde{E}_1(t + \tau) \widetilde{E}_2^*(t) \rangle + \widetilde{K}_1^* \widetilde{K}_2 \langle \widetilde{E}_1^*(t + \tau) \widetilde{E}_2(t) \rangle = 2\text{Re}[\widetilde{K}_1 \widetilde{K}_2^* \langle \widetilde{E}_1(t + \tau) \widetilde{E}_2^*(t) \rangle] \quad (2-7) \end{aligned}$$

Član  $\langle \widetilde{E}_1(t + \tau) \widetilde{E}_2^*(t) \rangle$  je zapravo definicija međukorelacijske funkcije  $\Gamma_{12}(\tau)$  u teoriji stohastičkih procesa, a u teoriji koherentnosti se ona naziva i zajednička koherentna funkcija polja  $\widetilde{E}_1$  i  $\widetilde{E}_2$  te predstavlja mjeru povezanosti polja  $\widetilde{E}_1$  u trenutku  $t + \tau$  s poljem  $\widetilde{E}_2$  u trenutku  $t$ .

$$\Gamma_{12}(\tau) \equiv \langle \widetilde{E}_1(t + \tau) \widetilde{E}_2^*(t) \rangle \quad (2-8)$$

Funkcija  $\Gamma_{11}(\tau) = \langle \widetilde{E}_1(t + \tau) \widetilde{E}_1^*(t) \rangle$  naziva se autokorelacijska funkcija, a u teoriji koherentnosti naziva se još i vlastita koherentna funkcija. Autokorelacijska funkcija javila bi se u slučaju kad bi se  $S_1$  i  $S_2$  podudarale, a predstavlja mjeru povezanosti polja  $\widetilde{E}_1$  sa samim sobom  $\tau$  kasnije u vremenu. Iz definicije autokorelacijske funkcije slijedi da je  $\Gamma_{11}(0) = I_{s1}$ ,  $\Gamma_{22}(0) = I_{s2}$ , te vrijedi  $I_1 = |\widetilde{K}_1|^2 \Gamma_{11}(0)$ ,  $I_2 = |\widetilde{K}_2|^2 \Gamma_{22}(0)$ , gdje su  $I_1$  i  $I_2$  intenziteti u P na slici 2.4. nastali kad bi samo jedna od pukotina bila otvorena. Iz ovog izvoda proizlazi značajan zaključak: koherentnost jest korelacija. Slijedi:

$$I_p = |\widetilde{K}_1|^2 I_{s1} + |\widetilde{K}_2|^2 I_{s2} + 2|\widetilde{K}_1||\widetilde{K}_2| \text{Re} \Gamma_{12}(\tau) \quad (2-9)$$

Normalizirana zajednička koherentna funkcija zove se kompleksni stupanj koherentnosti, a definira se kao:

$$\check{\gamma}_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\langle \widetilde{E}_1(t+\tau) \widetilde{E}_2^*(t) \rangle}{\sqrt{(|\widetilde{E}_1|^2)(|\widetilde{E}_2|^2)}} \quad (2-10)$$

Konačni izraz za intenzitet u točki P tada postaje:

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Re} \check{\gamma}_{12}(\tau) \quad (2-11)$$

Izraz (2-11) naziva se zakon interferencije za parcijalno koherentnu svjetlost. Za kvazimonokromatsku svjetlost razlika u fazi zbog razlike u optičkim putevima iznosi  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 2\pi\bar{\nu}\tau$  gdje su  $\bar{\lambda}$  i  $\bar{\nu}$  srednja valna duljina odnosno frekvencija svjetlosti.

Kompleksni stupanj koherentnosti se tada može izraziti kao  $\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|e^{i\Phi_{12}(\tau)}$ , gdje je  $\Phi_{12}(\tau) = \alpha_{12}(\tau) - \varphi$ ,  $\alpha_{12}(\tau) = \arg \tilde{\gamma}_{12}(\tau) + 2\pi\nu\tau$ , a  $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|$  se naziva stupanj koherentnosti, pa zakon interferencije za parcijalno koherentnu svjetlost postaje:

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| \cos[\alpha_{12}(\tau) - \varphi] \quad (2-12)$$

$I_1$  i  $I_2$  polako variraju kako se točka P pomiče po zaslonu na slici 2.4. jer su zaslon s pukotinama i zaslon na kojem se promatra uzorak međusobno jako udaljeni. Tada se  $\alpha_{12}$  i  $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|$  također polako mijenjaju preko dijela zaslona na kojem je razlika  $r_2 - r_1$  manja od koherentne duljine svjetlosti. No funkcija kosinus u izrazu (2-12) prolazi kroz nagle promjene s pomicanjem točke P zbog ovisnosti o varijabli  $\varphi$  pa  $I_p$  varira gotovo sinusoidalno s promjenom položaja točke P preko malog područja na zaslonu. Zato se u interferencijskom uzorku javljaju periodične, prostorne varijacije u intenzitetu koje se manifestiraju kao interferencijske pruge. Intenzitet u interferencijskom uzorku tako varira između svoje maksimalne i minimalne vrijednosti dane izrazima:

$$\begin{aligned} I_{max} &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| \\ I_{min} &= I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| \end{aligned} \quad (2-13)$$

### 2.2.2. Vidljivost interferencijskih uzoraka

Sljedeća važna veličina u teoriji koherentnosti jest vidljivost interferencijskih pruga. Ona je definirana na sljedeći način:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|}{I_1 + I_2} \quad (2-14)$$

te opisuje kvalitetu pruga, odnosno, koliko su pruge izražene, a identična je modulaciji u Fourierovoj analizi. Ono što slijedi iz izraza (2-14) jest da ukoliko vrijedi  $I_1 = I_2$ , to jest ukoliko su obje sekundarne pukotine jednako obasjane, što je uobičajeno slučaj, tada vidljivost odgovara modulu kompleksnog stupnja koherentnosti. Sustav u kojem to vrijedi proizvodi najkvalitetnije pruge.

Veličina  $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|$  može poprimiti vrijednosti između 0 i 1. U slučaju kad je  $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| = 1$ , prisutna je potpuna koherentnost polja i intenzitet varira oko točke P poprimajući vrijednosti između maksimalne  $4I_0$ , uz  $I_1 = I_2 = I_0$ , i minimalne vrijednosti 0. Tada je

rezultantni intenzitet isti onom kojeg stvaraju dva koherentna vala van faze u  $S_1$  i  $S_2$  za  $\alpha_{12}(\tau)$ . Vidljivost uzoraka je tad maksimalna, odnosno oni su potpuno razlučivi. Ako je taj uvjet ispunjen za sve vrijednosti  $\tau$  i bilo koji par točkaka tada je riječ o strogo monokromatskoj svjetlosti što je u prirodi neodrživo. Kad je  $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| = 0$ , dolazi do potpune nekoherentnosti i efekta interferencije neće biti. Kako vidljivost pada na nulu uzorak postaje potpuno nerazlučiv. Taj uvjet ne može biti ispunjen za sve vrijednosti  $\tau$  i bilo koji par točkaka u slobodnom prostoru. Domena u kojoj je  $0 < |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| < 1$  naziva se domena parcijalne koherentnosti.

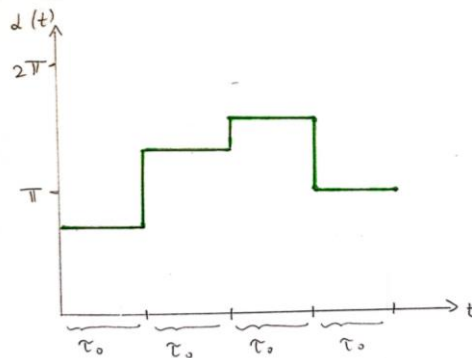
Stupanj koherentnosti i realni dio međukorelacijske funkcije mogu se odrediti direktnim mjerenjem i iz zakona interferencije. Pomak u lokaciji centralne pruge (od  $\varphi = 0$ ) je mjera za  $\alpha_{12}(\tau)$ , pa mjerenje vidljivosti i pozicije pruga daje informaciju o amplitudi i fazi (argumentu) kompleksnog stupnja koherentnosti.

### 3. KOHERENTNOST I ŠIRINA FREKVENTNOG POJASA IZVORA

U prirodi strogo monokromatski izvori ne postoje. Realna svjetlost se uvijek sastoji od komponenata s različitim frekvencijama pa se ona opisuje konačnom širinom frekventnog pojasa centriranog oko srednje vrijednosti frekvencija od kojih je sastavljena. Cilj ovog poglavlja je doći do zaključka kako širina frekventnog pojasa izvora utječe na koherentnost svjetlosti koju takav izvor generira.

#### 3.1. Koherentno vrijeme i koherentna duljina

Električno polje kvazimonokromatske svjetlosti sinusoidalno varira u vremenu tijekom nekog vremena  $\tau_0$  nakon čega nasumično promijeni fazu. Veličina  $\tau_0$  naziva se koherentno vrijeme i to je vremenski interval tijekom kojeg se može predvidjeti faza svjetlosnog vala u točki prostora. Ovisnost faze  $\alpha(t)$  takvog poremećaja o vremenu skicirana je na slici 3.1., a matematički opis poremećaja dan je izrazom (3-1).



Slika 3.1. Ovisnost faze kvazimonokromatske svjetlosti o vremenu (skica).

$$\tilde{E}(t) = E_0 e^{-i\bar{\omega}t} e^{i\alpha(t)} \quad (3-1)$$

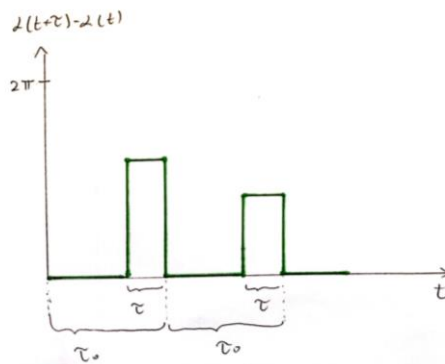
gdje je  $\bar{\omega} = 2\pi\bar{\nu}$  prosječna kutna frekvencija, a  $E_0$  amplituda vala. Ukoliko se zraka svjetlosti koja potječe od kvazimonokromatskog izvora razdvoji na dvije zrake opisane s  $\tilde{E}_1$  i  $\tilde{E}_2$  koje se zatim ponovno spoje da se promatra njihova interferencija, prevladat će efekti vremenske koherentnosti. Pod pretpostavkom  $|\tilde{E}_1| = |\tilde{E}_2| = |\tilde{E}|$ , kompleksni stupanj koherentnosti je sljedećeg oblika:

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \frac{\langle \tilde{E}(t+\tau)\tilde{E}^*(t) \rangle}{\langle |\tilde{E}|^2 \rangle} \quad (3-2)$$

U gornjem izrazu nema indeksa jer su iznosi polja jednaki, a poremećaji u točkama  $S_1$  i  $S_2$  identični pa je potrebno računati s autokorelacijskom funkcijom. Isto bi vrijedilo i u situaciji kad bi postojao prošireni izvor kvazimonokromatske svjetlosti, a kad bi se  $S_1$  i  $S_2$  podudarale. U takvim situacijama se  $\tilde{\gamma}(\tau)$  naziva i kompleksni stupanj vremenske koherentnosti polja u istoj točki za dva trenutka u vremenskom razmaku  $\tau$ . Nakon uvrštavanja izraza (2-1). slijedi:

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \langle e^{-i\bar{\omega}\tau} e^{i[\alpha(t+\tau)-\alpha(t)]} \rangle = e^{-i\bar{\omega}\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i[\alpha(t+\tau)-\alpha(t)]} dt \quad (3-3)$$

Razlika  $\alpha(t + \tau) - \alpha(t)$  u ovisnosti o vremenu skicirana je na slici 3.2.



Slika 3.2. Ovisnost razlike  $\alpha(t + \tau) - \alpha(t)$  o vremenu (skica).

Za  $0 < t < \tau_0 - \tau$  vrijedi  $\alpha(t) = \alpha(t + \tau)$  jer poremećaj zadržava istu fazu tijekom vremena  $\tau_0$ . Za  $\tau_0 - \tau < t < \tau_0$ , razlika poprima neku vrijednost koja je nasumična i u izvodu je označena sa  $\Delta$ . Tako na intervalu  $[0, \tau_0]$  gornji integral postaje:

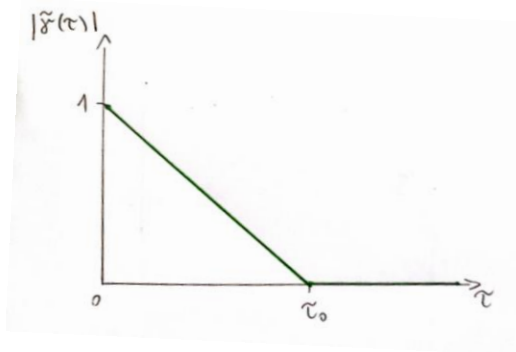
$$\frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} e^{i[\alpha(t+\tau)-\alpha(t)]} dt = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0-\tau} dt + \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_0-\tau}^{\tau_0} e^{i\Delta} dt = \frac{\tau_0-\tau}{\tau_0} + \frac{\tau}{\tau_0} e^{i\Delta} \quad (3-4)$$

Pošto je  $\Delta$  nasumična, prosjek izraza  $\frac{\tau}{\tau_0} e^{i\Delta}$  ide u nulu, dok je izraz  $\frac{\tau_0-\tau}{\tau_0}$  jednak za sve intervale. Ukoliko je  $\tau > \tau_0$ , prosjek cijelog integrala iščezava jer je razlika  $\alpha(t + \tau) - \alpha(t)$  uvijek nasumična. U slučaju  $\tau < \tau_0$  vrijedi:

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) e^{-i\bar{\omega}\tau} \quad (3-5)$$

$$|\tilde{\gamma}(\tau)| = 1 - \frac{\tau}{\tau_0} \quad (3-6)$$





Slika 3.3. Ovisnost stupnja koherentnosti o vrijednosti  $\tau$  (skica).

Slika 3.3. prikazuje skiciranu ovisnost stupnja koherentnosti odnosno, vidljivosti pruga interferencijskog uzorka u slučaju dvaju zraka istih amplituda o vrijednosti  $\tau$ . Ukoliko  $\tau$  prijeđe vrijednost koherentnog vremena kontrast između pruga pada na nulu i više nisu prisutni efekti interferencije. Duljina geometrijskog puta  $l$  kojeg zraka svjetlosti prelazi u vremenu  $\tau$  dana je sljedećom relacijom:

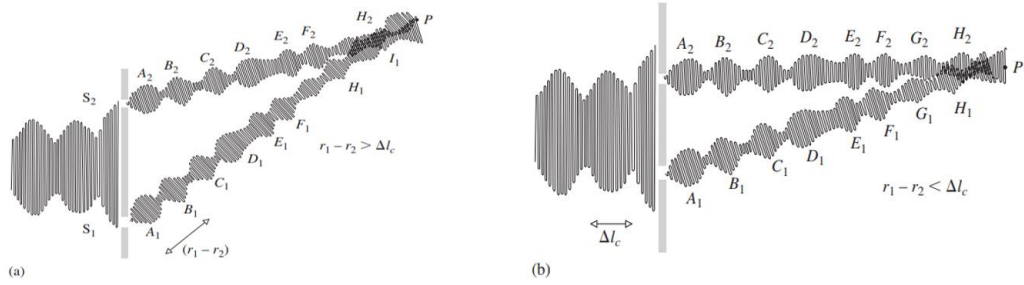
$$l = \tau c \quad (3-7)$$

gdje je  $c$  brzina svjetlosti. Dakle, ukoliko se želi održati efekt interferencije, razlika putova dvije zrake ne smije prijeći vrijednost  $l_c$ , koja se naziva koherentna duljina:

$$l_c = \tau_0 c \quad (3-8)$$

Koherentna duljina je zapravo duljina nepromijenjenog valnog oblika. Vidljivost pruga bit će veća što je razlika puteva dviju zraka manja u odnosu na njihovu koherentnu duljinu.

Slikovni prikaz efekata koherentnog vremena nalazi se na slici 3.4. O kvazimonokromatskoj svjetlosti moguće je razmišljati kao o slijedu valnih paketa čija srednja frekvencija odgovara srednjoj frekvenciji svjetlosti i čije je trajanje reda koherentnog vremena. Na zaslonu se ti valni paketi zbrajaju nakon što je između dvije zrake uveden relativni vremenski razmak. Ukoliko je vremenski razmak veći od koherentnog vremena svjetlosti, na zaslonu se zbrajaju raznoimene grupe (slika 3.4.a) te interferencija postoji vrlo kratko. Nestabilan uzorak se pomakne čim sljedeće grupe dođu u dodir jer su relativne faze različite. Ukoliko je razmak manji od koherentnog vremena, svaka grupa ponajviše međudjeluje sa svojom istoimenom kloniranom grupom, između faza postoji korelacija pa time i interferencijski uzorak (slika 3.4.b).



Slika 3.4. Vizualizacija veze između koherentnosti i koherentnog vremena izvora. (preuzeto iz literature [1])

Toplinski izvori poput lampe s plinskim pražnjenjem imaju širinu frekventnog pojasa reda veličine  $10^8$  Hz, koherentno vrijeme reda  $10^{-8}$  s, a koherentnu duljinu oko 3 m. Laseri s druge strane imaju širinu frekventnog pojasa reda veličine  $10^4$  Hz, koherentno vrijeme reda veličine  $10^{-4}$  s, a koherentnu duljinu oko 30 km [3]. Koherentna duljina izvora mjeri se Michelsonovim interferometrom.

### 3.2. Spektar snage

Fourierov teorem nalaže da se neki analitički signal  $f(\mathbf{r}, t)$  koji ovisi o varijabli  $t$  može izraziti preko integrala koji za varijablu integracije ima  $\nu$  na sljedeći način:

$$f(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} g(\mathbf{r}, \nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu$$

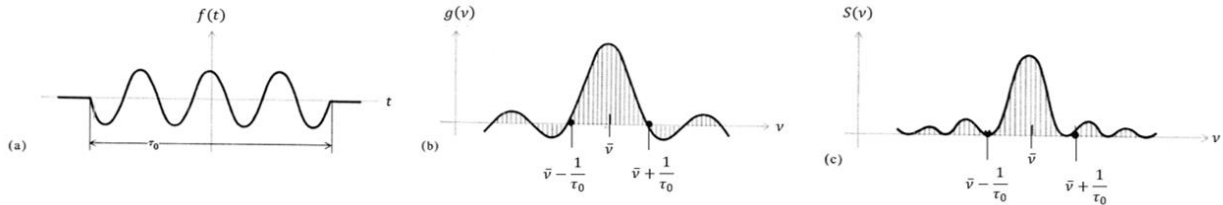
$$g(\mathbf{r}, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{i2\pi\nu t} dt \quad (3-9)$$

gdje je funkcija  $g(\mathbf{r}, \nu)$  Fourierov transformat, funkcija  $f(\mathbf{r}, t)$  inverzni Fourierov transformat, a u optici varijable  $t$  i  $\nu$  predstavljaju vrijeme i frekvenciju. Signal  $f(\mathbf{r}, t)$  predstavlja fluktuirajuće svjetlosno polje za koje se pretpostavlja da je stacionarno i ergodičko. Funkcija  $g(\mathbf{r}, \nu)$  predstavlja funkciju  $f(\mathbf{r}, t)$  u frekventnoj domeni. Ukoliko funkcija  $f(t)$  reprezentira konačni valni paket srednje frekvencije  $\bar{\nu}$  i trajanja  $\tau_0$  u vremenu (izraz (3-10)), tad je njen Fourierov transformat dan izrazom (3-11). Funkcija  $f(t)$  i njen transformat  $g(\nu)$  prikazani su na slici 3.5.a i 3.5.b respektivno.

$$f(t) = e^{-i2\pi\bar{\nu}t}, \quad -\frac{\tau_0}{2} < t < \frac{\tau_0}{2}$$

$$= 0, \text{ ina\u0107e} \quad (3-10)$$

$$g(\nu) = \frac{2\sin\left[2\pi(\nu-\bar{\nu})\frac{\tau_0}{2}\right]}{2\pi(\nu-\bar{\nu})} \quad (3-11)$$



Slika 3.5. Grafi\u010dki prikazi a) kona\u010dnog valnog paketa u vremenskoj domeni, b) kona\u010dnog valnog paketa u frekventnoj domeni, c) spektar snage kona\u010dnog valnog paketa. (preuzeto iz literature [2])

Me\u010duspektralna gusto\u0107a ili me\u010duspektar snage  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$  za dva poreme\u0107aja u to\u010dkama  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$  na frekvenciji  $\nu$  definira se kao:  $\langle g^*(\mathbf{r}_1, \nu)g(\mathbf{r}_2, \nu') \rangle = G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)\delta(\nu - \nu')$ , gdje je  $\delta$  Diracova delta funkcija, a prosjek se uzima po razli\u010ditim realizacijama polja. Prethodni izraz poznat je kao Parsevalova formula. Me\u010duspektar snage je mjera korelacije izme\u010du spektralnih amplituda bilo koje frekventne komponente svjetlosnih vibracija u to\u010dkama  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$ . Prema Wiener-Khintchineovom teoremu, zajedni\u010dka koherentna funkcija i me\u010duspektar snage tvore Fourierov par transformata:

$$\Gamma_{12}(\tau) = \int_0^{\infty} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) e^{-2\pi i\nu\tau} d\nu$$

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{12}(\tau) e^{2\pi i\nu\tau} d\tau \quad (3-12)$$

Kad se to\u010dke  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$  podudaraju me\u010duspektar snage prelazi u spektar snage svjetlosti  $S(\mathbf{r}, \nu)$  koji tvori Fourierov par s autokorelacijskom funkcijom te je on mjera prosje\u010dne gusto\u0107e energije u to\u010dki  $\mathbf{r}$  na frekvenciji  $\nu$ . Funkcije  $S$  i  $G$  mogu se odrediti eksperimentalno mjerenjem me\u010dukorelacijskih i autokorelacijskih funkcija i pomo\u0107u relacije (3-12).

Funkcija  $S(\nu)$  za slučaj konačnog valnog paketa prikazana je na slici 3.5.c te iznosi:

$$S(\nu) = \frac{4\sin^2\left[2\pi(\nu-\bar{\nu})\frac{\tau_0}{2}\right]}{4\pi^2(\nu-\bar{\nu})^2} \quad (3-13)$$

Vidljivo je da je spektralna distribucija maksimalna u točki  $\nu = \bar{\nu}$ , a prve nule funkcije se javljaju u točkama  $\nu = \bar{\nu} \pm \frac{1}{\tau_0}$ , odnosno većina je energije sadržana u području između prve dvije nule funkcije. Upravo zbog tih rezultata se širina frekventnog pojasa definira kao  $\Delta\nu = \frac{1}{\tau_0}$ . Isti spektar snage javlja se i u slučaju kad je u sustavu prisutno više valnih paketa, svaki u trajanju od  $\tau_0$ . Ukoliko se njihova koherentna vremena razlikuju, tada se za koherentno vrijeme uzima vremenski prosjek koherentnih vremena pojedinačnih paketa. Koherentno vrijeme i koherentna duljina koji odgovaraju širini frekventnog pojasa  $\Delta\nu$  su:

$$\langle\tau_0\rangle = \frac{1}{\Delta\nu} \quad (3-14)$$

$$l_c = c\langle\tau_0\rangle = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \quad (3-15)$$

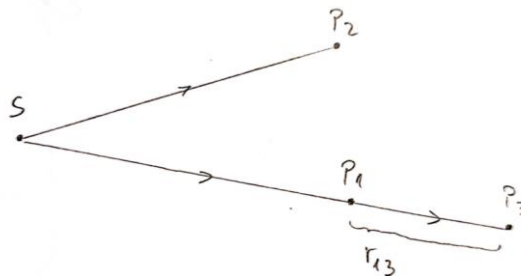
Zapravo, bilo koji realni val postoji tijekom konačnog vremenskog odnosno, prostornog intervala pa se može smatrati dugačkim pulsom, to jest, identičan je superpoziciji harmoničkih valova različitih frekvencija, amplituda i faza Fourierovih komponenata koji se poništavaju svuda osim na mjestima gdje su u fazi. Rezultantni poremećaj je tako predstavljen lokaliziranim pulsom- valnim paketom. Uski pojas frekvencija individualnih harmoničkih doprinosa tvore rezultatni paket koji je širok u vremenu i obrnuto. Pošto autokorelacija i spektar snage tvore Fourierov par, što je veća širina frekventnog pojasa to je uža autokorelacija. Dakle, ako je frekventni pojas širok, paket je uzak u vremenu, pa čak i manji vremenski pomak  $\tau$  smanjuje sličnost između  $f(t)$  i  $f(t + \tau)$ . Što je paket u vremenu širi to sporije korelacija opada sa  $\tau$ . Može se reći da sužavanje frekventnog pojasa širi korelaciju.

## 4. KOHERENTNOST I DIMENZIJE IZVORA

Interferencijski eksperiment s dvije pukotine zapravo je prvi proveo Grimaldi 1665. godine sa Suncem kao primarnim izvorom, bez zaslona s pukotinom-S kao što je slučaj u Youngovom eksperimentu. Taj je eksperiment propao jer se na zaslonu nisu pojavili interferencijski uzorci. Kao što će na kraju ovog poglavlja biti jasno, razlog tome je što je Sunčev disk bio prevelik da zadovoljavajuće simultano obasja obje pukotine. U ovom poglavlju se dakle, istražuje povezanost koherentnosti s dimenzijama izvora.

### 4.1. Transverzalna i longitudinalna koherentnost

Neka točkasti kvazimonokromatski izvor S stvara poremećaje  $E_1$ ,  $E_2$  i  $E_3$  u promatranim točkama  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$  respektivno kao što je prikazano na slici 4.1.

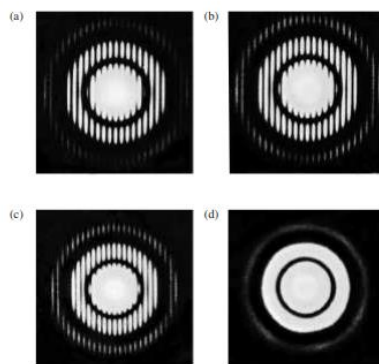


Slika 4.1. Skica točkaca u kojima se promatraju efekti transverzalne i longitudinalne koherentnosti.

Usporedbom poremećaja u točkama  $P_1$  i  $P_3$  vidljivi su efekti longitudinalne prostorne koherentnosti polja koja se naziva još i vremenska koherentnost jer se zasniva na korelaciji između polja koja postoji kad se između zraka svjetlosti uspostavi vremensko zakašnjenje. Pošto točke S,  $P_1$  i  $P_3$  leže na istom pravcu, polje  $E_3$  varira u vremenu na isti način kao polje  $E_1$ , samo za  $t_{13} = \frac{r_{13}}{c}$  kasnije, gdje je  $r_{13}$  udaljenost od točke  $P_1$  do točke  $P_3$ . Koherentnost između ova dva polja ovisit će samo o tome kakav je  $r_{13}$  u usporedbi s koherentnom duljinom, odnosno kakav je  $t_{13}$  u usporedbi s koherentnim vremenom svjetlosti. Ukoliko je  $t_{13}$  puno manji od koherentnog vremena, između ova dva poremećaja postojat će visok stupanj korelacije, a ukoliko je veći, korelacije neće biti. Odnosno, kad bi  $r_{13}$  bio puno veći od koherentne duljine, puno valnih paketa nepovezane faze koji sačinjavaju kvazimonokromatsko svjetlo popunilo bi prazninu između točkaca  $P_1$  i  $P_3$  pa bi poremećaji u te dvije točke bili bi međusobno nepovezani u bilo kojem trenutku. Taj efekt je posljedica konačnosti širine frekventnog pojasa svjetlosti. Kad bi svjetlost bila monokromatska, širina

frekventnog pojasa bila bi nula, a koherentno vrijeme beskonačno. Iako u stvarnosti strogo monokromatska svjetlost ne postoji, na intervalu koji je mnogo kraći od koherentnog vremena realni val se ponaša kao da je uistinu monokromatski.

Za promatranje efekata longitudinalne koherentnosti može se koristiti Youngov eksperiment. Na slici 4.2.a prikazani su uzorci nastali u Youngovom eksperimentu korištenjem svjetlosti iz He-Ne lasera. Na slici 4.2.b preko jedne od sekundarnih pukotina postavljeno je staklo i promjene u uzorku nema jer je razlika u optičkom putu dviju zraka nametnuta zbog stakla manja u usporedbi s koherentnom duljinom lasera. Na slikama 4.2.c i 4.2.d kao izvor svjetlosti korištena je živina lampa, a na slici 4.2.d je preko jedne sekundarne pukotine ponovno postavljeno staklo. Ovaj put je razlika u optičkom putu nametnuta zbog stakla veća u usporedbi s koherentnom duljinom lampe i na zaslon promatranja sad stižu nepovezani valni paketi između kojih nema korelacije, pa i vidljivost uzoraka pada na nulu.



Slika 4.2. Primjer efekata longitudinalne koherentnosti. Interferencijski uzorci nastali korištenjem a) He-Ne lasera, b) He-Ne lasera sa staklom preko jedne od sekundarnih pukotina, c) živine lampe, d) živine lampe sa staklom preko jedne od sekundarnih pukotina. (preuzeto iz literature [1])

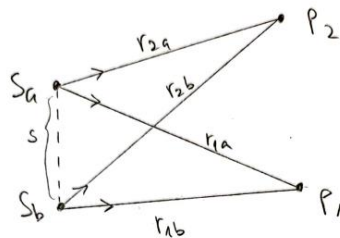
Usporedbom poremećaja u točkama  $P_1$  i  $P_2$  vidljivi su efekti transverzalne prostorne koherentnosti polja, koja se naziva i prostorna koherentnost. Točke od interesa sada leže na istoj udaljenosti od točke  $S$ , ali na različitim pravcima. Transverzalna koherentnost je od velike važnosti kod promatranja proširenog izvora uske širine frekventnog pojasa. Za izvor se kaže da je proširen ako je on realnih dimenzija, nije točkast. Kada se takav izvor koristi kao primaran u Youngovom eksperimentu, poremećaji na pukotinama  $S_1$  i  $S_2$  se razlikuju, a uzorak pruga ovisi o  $\Gamma_{12}(\tau)$  i  $\check{\gamma}_{12}(\tau)$ , to jest o kompleksnom stupnju prostorne koherentnosti u dvije točke u istom trenutku, u slučaju geometrijske simetrije situacije. Ukoliko je  $S$  točkasti izvor, poremećaji u točkama  $P_1$  i  $P_2$  bit će potpuno koherentni. Ukoliko je izvor  $S$  proširen i ukoliko se analizira na način da se  $S$  podjeli u velik broj točkastih izvora koji ga sačinjavaju,

dva takva točkasta izvora koja su na većoj udaljenosti od valne duljine svjetlosti će se ponašati neovisno i bit će nekoherentni. No kao što će kasnije u radu biti pokazano, na nekom području udaljenom od izvora povezanosti u poremećajima će ipak biti.

## 4.2. Prošireni izvor

### 4.2.1. Transverzalna koherentna širina i koherentno područje

U postupku korelacijske analize prošireni linijski izvor duljine  $s$  se radi jednostavnosti može smatrati kao da je načinjen od puno međusobno nekoherentnih, identičnih točkastih izvora kvazimonokromatske svjetlosti sa srednjom valnom duljinom  $\bar{\lambda}$ , a svaki od njih daje doprinos ukupnom interferencijskom uzorku. U izvodu koji slijedi će se analizirati slučaj transverzalne koherentnosti za dva takva točkasta izvora koja se nalaze na rubovima proširenog izvora, tako da je udaljenost između ta dva točkasta izvora upravo  $s$ . Situacija je skicirana na slici 4.3.



Slika 4.3. Geometrijske oznake korištene u analizi transverzalne koherentnosti za dva točkasta nekoherentna kvazimonokromatska izvora (skica).

Uz geometrijske oznake prikazane na slici, poremećaji u točkama  $P_1$  i  $P_2$  su respektivno:

$$\tilde{E}_1 = \tilde{E}_{1a} + \tilde{E}_{1b}$$

$$\tilde{E}_2 = \tilde{E}_{2a} + \tilde{E}_{2b} \quad (4-1)$$

gdje je  $\tilde{E}_{1a}$  doprinos poremećaju  $\tilde{E}_1$  od strane izvora  $S_a$ ,  $\tilde{E}_{1b}$  doprinos poremećaju  $\tilde{E}_1$  od strane izvora  $S_b$ ,  $\tilde{E}_{2a}$  doprinos poremećaju  $\tilde{E}_2$  od strane izvora  $S_a$ ,  $\tilde{E}_{2b}$  doprinos poremećaju  $\tilde{E}_2$  od strane izvora  $S_b$ . Ako je razlika između udaljenosti  $r_{1a}$  i  $r_{2a}$  manja od koherentne duljine svjetlosti, vrijedi  $\tilde{E}_{1a} = \tilde{E}_{2a}$ . Isto tako ako je razlika između udaljenosti  $r_{1b}$  i  $r_{2b}$  manja od koherentne duljine svjetlosti, vrijedi  $\tilde{E}_{1b} = \tilde{E}_{2b}$ . Zato su, iako između  $\tilde{E}_{1a}$  i  $\tilde{E}_{1b}$  te između  $\tilde{E}_{2a}$  i  $\tilde{E}_{2b}$  ne postoji korelacija pošto ih stvaraju međusobno nekoherentni izvori, sume u

izrazima (4-1) ipak povezane. Iako su izvori statistički neovisni oni ipak doprinose korelacijama u poljima koje su generirane procesima propagacije i superpozicije. Kompleksni stupanj koherentnosti glasi:

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = \frac{\langle \tilde{E}_1(t+\tau)\tilde{E}_2^*(t) \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} = \frac{\langle [\tilde{E}_{1a}(t+\tau) + \tilde{E}_{1b}(t+\tau)][\tilde{E}_{2a}^*(t) + \tilde{E}_{2b}^*(t)] \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} = \frac{\langle \tilde{E}_{1a}(t+\tau)\tilde{E}_{2a}^*(t) \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} + \frac{\langle \tilde{E}_{1b}(t+\tau)\tilde{E}_{2b}^*(t) \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (4-2)$$

Članovi  $\langle \tilde{E}_{1a}(t+\tau)\tilde{E}_{2b}^*(t) \rangle$  i  $\langle \tilde{E}_{1b}(t+\tau)\tilde{E}_{2a}^*(t) \rangle$  nestaju jer su izvori međusobno nekoherentni. Sada je uz korištenje izraza  $\tilde{\gamma}(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) e^{-i\omega\tau}$  za kompleksni stupanj koherentnosti pojedinog kvazimonokromatskog izvora izvedenog u poglavlju 3 i uz uzimanje u obzir individualnih vremena koja su potrebna poremećajima da stignu od svog izvora do promatrane točke moguće dobiti izraze:

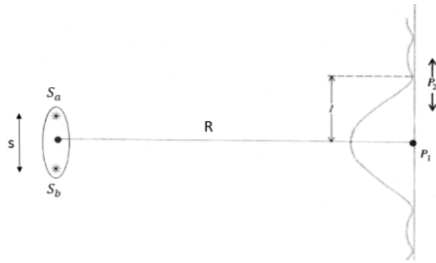
$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(\tau_a) + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(\tau_b) \quad (4-3)$$

$$|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|^2 \propto \left(\frac{1+\cos[\omega(\tau_a-\tau_b)]}{2}\right) \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_0}\right) \left(1 - \frac{\tau_b}{\tau_0}\right) \quad (4-4)$$

Gdje su:

$$\tau_a = \frac{r_{1a}-r_{2a}}{c} + \tau, \quad \tau_b = \frac{r_{1b}-r_{2b}}{c} + \tau \quad (4-5)$$

Iz izraza (4-4) vidljivo je da koherentnost poremećaja u točkama  $P_1$  i  $P_2$  ovisi periodično o razlici  $\tau_a - \tau_b$ . Pošto ta razlika ovisi o prostornim koordinatama  $r$ , dolazi do periodičnih prostornih varijacija u stupnju koherentnosti.



Slika 4.4. Ovisnost stupnja koherentnosti o međusobnoj udaljenosti točaka  $P_1$  i  $P_2$ . (preuzeto iz literature [2])

Ukoliko je točka  $P_1$  locirana tako da je  $r_{1a} = r_{1b}$  kao što je prikazano na slici 4.4. vrijedi:

$$\tau_a - \tau_b = \frac{r_{2b}-r_{2a}}{c} \approx \frac{sl}{2cR} \quad (4-6)$$

Gdje je  $R$  srednja udaljenost od izvora do točaka  $P_1$  i  $P_2$ ,  $s$  međusobna udaljenost između izvora, a  $l$  međusobna udaljenost između točaka  $P_1$  i  $P_2$ , uz  $R \gg l, s$ . Krivulja na slici 4.4.



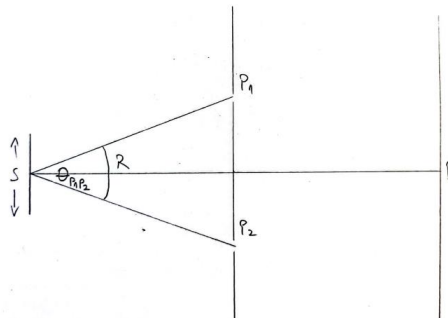
prikazuje funkciju  $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|$  u ovisnosti o  $l$ . Zajednička koherentnost, a time i vidljivost pruga najveća je za slučaj kad se  $P_1$  i  $P_2$  podudaraju, odnosno za  $l = 0$ . Prve nule, odnosno minimumi funkcije javljaju se uz uvjet:

$$\omega(\tau_a - \tau_b) = \frac{\omega s l_t}{2cr} = \pi \quad (4-7)$$

na udaljenosti  $l_t$  od centralnog maksimuma. Za vrijednost  $l_t$  tako se dobiva izraz:

$$l_t = \frac{R\bar{\lambda}}{s} = \frac{\bar{\lambda}}{\theta_s} \quad (4-8)$$

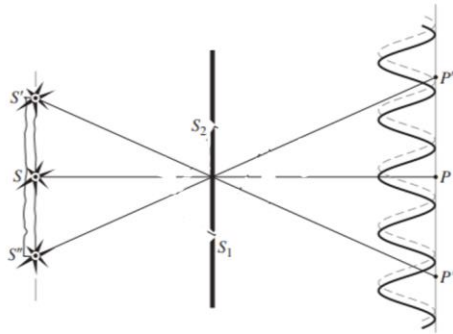
Gdje je u drugom koraku upotrijebljena aproksimacija  $\theta_s \approx \frac{s}{R}$ , a  $\theta_s$  je kutna udaljenost dvaju izvora koja se vidi iz točke  $P_1$ . Veličina  $l_t$  je onda širina područja visokog stupnja zajedničke koherentnosti između poremećaja u točkama  $P_1$  i  $P_2$ , a naziva se transverzalna koherentna širina. Vidljivo je da kako bi transverzalna koherentna širina bila što veća,  $\theta_s$  mora biti što manji, odnosno veličina proširenog izvora mora biti što manja. Također, transverzalna koherentna širina postaje veća što je udaljenost točaka kojim se mjeri međusobna korelacija od izvora  $R$  veća. U terminima kutne udaljenosti između točaka  $P_1$  i  $P_2$  označene sa  $\theta_{P_1P_2}$  (slika 4.5.) u odnosu na izvor, transverzalna koherentna širina glasi  $l_t = R\theta_{P_1P_2}$ . Ukoliko se radi o dvodimenzionalnom izvoru kvadratnog oblika stranica duljine  $s$ , stabilni uzorak se javlja uz uvjet  $\theta_{P_1P_2}s \leq \bar{\lambda}$ , odnosno, ukoliko se točke  $P_1$  i  $P_2$  nalaze unutar područja  $\Delta A \sim (R\theta_{P_1P_2})^2 \sim \frac{R^2\bar{\lambda}^2}{s}$ , gdje je  $S$  površina izvora, a  $\Delta A$  se naziva koherentno područje.



Slika 4.5. Kutna udaljenost između točaka  $P_1$  i  $P_2$  u odnosu na izvor (skica).

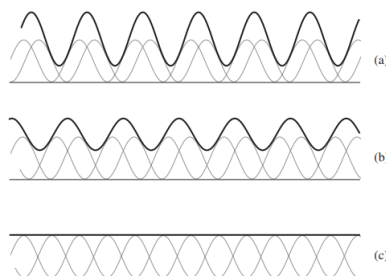
#### 4.2.2. Youngov eksperiment s proširenim izvorom

U ovom odjeljku dan je intuitivan opis efekata transverzalne koherentnosti u Youngovom eksperimentu. Postav Youngovog eksperimenta s proširenim izvorom prikazan je na slici 4.6. Točke  $P_1$  i  $P_2$  iz prethodnog izvoda sad odgovaraju sekundarnim pukotinama  $S_1$  i  $S_2$ .



Slika 4.6. Youngov eksperiment s proširenim izvorom. (preuzeto iz literature [1])

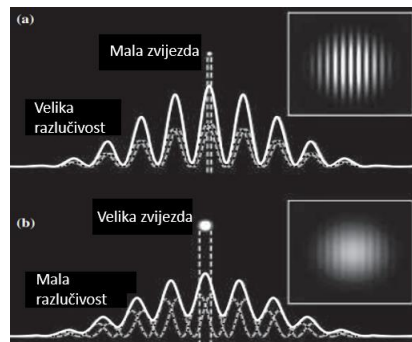
Pošto su točkasti izvori koji tvore prošireni izvor međusobno nekoherentni, svaki od njih tvori svoj interferencijski uzorak, a individualni uzorci se samo preklapaju na zaslonu na kojem se uzorak promatra. Ukoliko se točkasti izvori  $S'$  i  $S$  sa slike 4.6. podudaraju, oni tvore individualne uzorke koji se preklapaju „vrh-na-vrh“ te je rezultatni uzorak jednak onom kad bi se radilo o savršenom točkastom izvoru. Kako se  $S'$  odmiče, odnosno kako se dimenzija proširenog izvora povećava, individualni uzorci pruga padaju sve više međusobno van faze dok rezultatni uzorak ne postane potpuno nerazlučiv. Evolucija interferencijskog uzorka s povećanjem dimenzija izvora prikazana je na slici 4.7.



Slika 4.7. Evolucija interferencijskog uzorka s povećanjem dimenzija izvora. Individualni uzorci se zbrajaju na zaslonu, a povećanjem dimenzija izvora padaju sve više van faze. Jednom kad su uzorci potpuno van faze (c) vrijedi uvjet (4-8). (preuzeto iz literature [1])

Jednom kad individualni uzorci padnu u potpunosti van faze vrijedi uvjet (4-8) gdje je udaljenost od  $S'$  i  $S$  dana u terminima  $\theta_s$ , a  $l_t$  odgovara međusobnoj udaljenosti pukotina. Isto

pravilo vrijedi i za sve parove točaka ispod S i S (osim jedne točke). Zato kako bi postojao visok stupanj koherentnosti na pukotinama pa time i razlučiv rezultatni interferencijski uzorak potrebno je ispuniti jedan od dva uvjeta; veličina izvora u terminima kutne udaljenosti mora biti manja od  $\theta_s$  iz uvjeta (4-8), razmak između pukotina mora biti manji od koherentne širine iz izraza (4-8). Koherentnost između poremećaja na dvjema pukotinama se također povećava što je zaslon s pukotinama dalje od izvora jer tada svaki nekoherentni točkasti izvor uže osvjetljava zaslon s pukotinama i manje će biti razmaknuti njihovi individualni uzorci na zaslonu promatranja, odnosno njihovi uzorci se gotovo preklapaju „vrh-na-vrh“. Ovisnost razlučivosti uzoraka ilustrirana je na slici 4.8.



Slika 4.8. Izvor malih dimenzija stvara uzorak velike razlučivosti (a). Izvor velikih dimenzija stvara uzorak male razlučivosti (b). (preuzeto iz literature [1])

Na slici 4.8.a je prikazan mali toplinski izvor koji proizvodi razlučiv uzorak. Iz pukotina izlazi “disk svjetlosti” koji je zbog difrakcije na pukotini najsvjetliji u centru, a oko centra stvara koncentrične kružnice pa su Youngovi uzorci još modulirani i difrakcijskom ovojnicom, a zato je i centralni maksimum u uzorku najsvjetliji. Rezultantni uzorak intenziteta pomaknut je iznad  $I = 0$  ravnine. Na slici 4.8.b je prikazan veći izvor koji proizvodi uzorak manje razlučivosti moduliran nižom ovojnicom, a on više lebdi iznad  $I = 0$  ravnine jer osvjetljenost nije idealno koherentna, pa intenzitet nema minimuma na nuli (tama).

Temeljem dosadašnjih zaključaka objašnjenje Grimaldijevog eksperimenta s početka ovog poglavlja je postalo jasno. Sunčev disk korišten kao primarni izvor u interferencijskom eksperimentu kutnog promjera od 32 lučne minute [1], bio je prevelik pa svjetlost nije imala dovoljno visok stupanj prostorne koherentnosti na sekundarnim pukotinama. Sunčev

promjer je trebao imati tek nekoliko lučnih minuta. Tek je kasnije Young ponovio ovaj eksperiment, ali je svjetlost najprije propustio kroz jednu pukotinu koja je služila kao novi primarni izvor s prostorno koherentnom zrakom koja je mogla identično obasjati obje sekundarne pukotine. Godine 1860. Verdet je pokazao da je Grimaldijev eksperiment ipak moguć i da primarni izvor koji se smatrao nekoherentnim, poput Sunca, ipak može proizvoditi pruge kad obasjava dvije međusobno bliske pukotine, no one moraju ležati unutar koherentnog područja. Zaključno, netočno je govoriti o tome da izvor jest ili nije koherentan, već treba govoriti da sama svjetlost jest ili nije koherentna.

## 5. PROPAGACIJA KORELACIJE

U prethodnim poglavljima efekti vremenske i prostorne koherentnosti promatrani su odvojeno. U slučaju vremenske koherentnosti bila je ključna ovisnost korelacije o parametru  $\tau$  jer se koherentnost promatrala kad se između dvije zraka uvede vremensko kašnjenje. U slučaju prostorne koherentnosti bila je ključna ovisnost o međusobnoj udaljenosti točaka  $P_1$  i  $P_2$  dok je vremensko kašnjenje bilo ograničeno na vrijednost malu u usporedbi s koherentnim vremenom izvora. Generalno ove dvije vrste koherentnosti nisu neovisne. Također koherentno područje uglavnom nije dano jednostavnom formulom iz odjeljka 4.2.1. Ovo poglavlje istražuje kako se koherentnost svjetlosti mijenja procesom propagacije EM vala i kako se stupanj koherentnosti može odrediti za bilo koji tip izvora.

### 5.1. Valne jednadžbe

Neka  $E(\mathbf{r}, t)$  predstavlja fluktuirajuće polje svjetlosti i to kao realni nasumični proces, a neka je  $\tilde{E}(\mathbf{r}, t)$  njegov pripadajući kompleksni analitički signal. Obje reprezentacije zadovoljavaju valnu jednadžbu:

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (5-1)$$

$$\nabla^2 \tilde{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (5-2)$$

Ukoliko se zadnji izraz konjugira,  $\mathbf{r}$  i  $t$  se zamijene sa  $\mathbf{r}_1$  i  $t_1$ , a  $\nabla_1^2$  predstavlja Laplaceov operator s obzirom na  $\mathbf{r}_1$  te se još obje strane pomnože sa  $\tilde{E}(\mathbf{r}_2, t_2)$  zadnja jednadžba postaje:

$$\nabla_1^2 [\tilde{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \tilde{E}(\mathbf{r}_2, t_2)] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 [\tilde{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \tilde{E}(\mathbf{r}_2, t_2)]}{\partial t_1^2} \quad (5-3)$$

Izrazi u zagradama se nakon uzimanja prosjeka po ansamblu identificiraju kao međukorelacijska funkcija, a ako je polje stacionarno i ergodičko korelacijska funkcija o  $t_1$  i  $t_2$  ovisi samo kroz njihovu razliku  $\tau = t_2 - t_1$  pa slijedi:

$$\nabla_1^2 \Gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma_{12}(\tau)}{\partial \tau^2} \quad (5-4)$$

$$\nabla_2^2 \Gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma_{12}(\tau)}{\partial \tau^2} \quad (5-5)$$

gdje se druga jednadžba dobiva na sličan način kao prva, uz  $\nabla_2^2$  koji predstavlja Laplaceov operator s obzirom na  $\mathbf{r}_2$ . Dakle, zajednička koherentna funkcija u slobodnom prostoru zadovoljava dvije valne jednadžbe dane izrazima (5-4) i (5-5). Svaka jednadžba opisuje promjene zajedničke koherentne funkcije dok se jedna od točaka  $\mathbf{r}_1$  ili  $\mathbf{r}_2$  drži fiksnom, a druga točka i parametar  $\tau$  mijenjaju. Promjene u koherentnosti svjetlosti koje se javljaju kako ona propagira dalje od izvora posljedica su činjenice da zajednička koherentna funkcija poštuje propagacijske zakone (5-4) i (5-5). Kako ti zakoni vežu ovisnost koherentne funkcije o  $\tau$  i ovisnost o  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$ , slijedi da su efekti vremenske i prostorne koherentnosti također povezani. Zakoni propagacije također svode problem pronalaska zajedničke koherentne funkcije za bilo koji par točaka na rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Pošto je međuspektralna gustoća Fourierov transformat zajedničke koherentne funkcije, ona u slobodnom prostoru zadovoljava Helmholtzove jednadžbe:

$$\nabla_1^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) + k^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0 \quad (5-6)$$

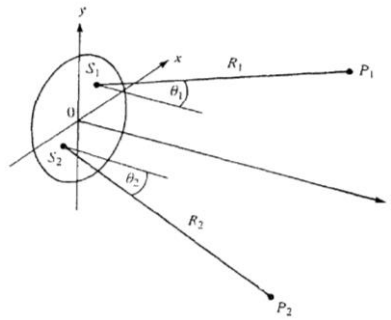
$$\nabla_2^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) + k^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0 \quad (5-7)$$

uz  $k = 2\pi\nu/c$ .

## 5.2. Propagacija korelacije s različitim tipova površina

Računanje propagacije korelacije s ravnine  $z = 0$  provodi se u smislu Dirichletovog rubnog uvjeta za Helmholtzovu jednadžbu u poluprostoru  $z > 0$  te pomoću Rayleighjeve prve difrakcijske formule. Rješavanjem gornjih diferencijalnih jednadžbi se na taj način dobiva formula za zajedničku koherentnu funkciju za bilo koji par točaka  $P_1(\mathbf{r}_1)$  i  $P_2(\mathbf{r}_2)$  i za sve vrijednosti  $\tau$  u poluprostoru  $z > 0$  u terminima zajedničke koherentne funkcije i njene prve i druge derivacije po  $\tau$  u svim parovima točaka  $S_1(\mathbf{r}_1')$  i  $S_2(\mathbf{r}_2')$  na ravnini  $z = 0$ . Formula kakvu izvode Mandel i Wolf [3] je dana izrazom (5-8) u slučaju kad su  $P_1(\mathbf{r}_1)$  i  $P_2(\mathbf{r}_2)$  na velikoj udaljenosti od izvora tako da vrijedi  $R_1, R_2 \gg \lambda$ , a skica situacije je prikazana na slici 5.1. Veličine  $\theta_1$  i  $\theta_2$  označavaju kutove koje  $S_1P_1$  i  $S_2P_2$  zatvaraju s pozitivnim smjerom  $z$ -osi respektivno, a  $\Gamma_{12}''$  označava drugu derivaciju  $\Gamma_{12}$  po  $\tau$ .

$$\Gamma_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \approx -\frac{1}{(2\pi c)^2} \iint_{z=0} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{R_1 R_2} \Gamma_{12}'' \left( \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \tau - \frac{R_2 - R_1}{c} \right) d^2 r'_1 d^2 r'_2 \quad (5-8)$$



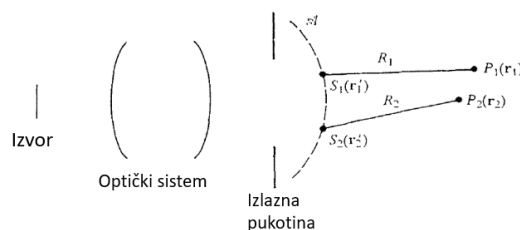
Slika 5.1. Propagacija korelacije s ravnine. (preuzeto iz literature [3])

Računanje propagacije korelacije sa zakrivljenih površina provodi se pomoću Huygens-Fresnelovog principa čime se dobiva aproksimativna formula koja je zadovoljavajuća u većini slučajeva. Ona je po Mandelu i Wolfu [3] uz aproksimaciju

$\frac{|R_2 - R_1|}{c} \ll \frac{1}{\Delta\nu}$  dana s:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \approx \iint_{\mathcal{A}} \Gamma(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \tau) \frac{e^{i\bar{k}(R_2 - R_1)}}{R_1 R_2} \bar{\Lambda}_1^* \bar{\Lambda}_2 d^2 r'_1 d^2 r'_2 \quad (5-9)$$

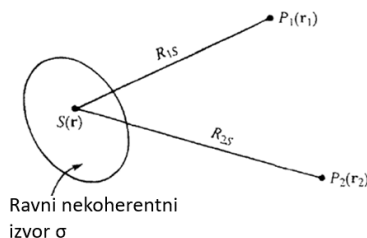
gdje je  $\mathcal{A}$  zakrivljena površina,  $R_1$  i  $R_2$  udaljenosti od točke  $S_1$  do  $P_1$  i od točke  $S_2$  do  $P_2$  respektivno, a  $\Lambda_1$  i  $\Lambda_2$  inklinacijski faktori, a kad je svjetlo kvazimonokromatsko,  $\bar{\Lambda}_1$  i  $\bar{\Lambda}_2$  su vrijednosti koje faktori imaju pri srednjoj frekvenciji svjetlosti. Svjetlost je proizvedena od strane optičkog sustava prikazanog na slici 5.2.



Slika 5.2. Propagacija korelacije sa zakrivljene površine. (preuzeto iz literature [3])

### 5.3. Van Cittert-Zernikeov teorem

Na temelju gornjih tvrdnji moguće je predstaviti centralni teorem teorije parcijalne koherentnosti - van Cittert-Zernikeov teorem, koji opisuje korelaciju polja u dvije točke generiranu od strane prostorno nekoherentnog kvazimonokromatskog ravnog izvora prikazanog na slici 5.3.



Slika 5.3. Propagacija korelacije sa prostorno nekoherentnog kvazimonokromatskog ravnog izvora. (preuzeto iz literature [3])

Teorem je moguće izvesti pomoću zadnjeg izraza (5-9) uz izbor  $\tau = 0$ , jer su u praksi uvijek najjednostavniji efekti interferencije pod uvjetima geometrijske simetrije. Veličina  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)$  naziva se još i zajednički intenzitet i označava kao  $J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . Ako su kutovi difrakcije na izlaznoj pukotini mali tada vrijedi  $\Lambda_1(k) \approx \Lambda_2(k) \approx \frac{ik}{2\pi}$ , te slijedi:

$$J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2 \iint_{\mathcal{A}} J(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \frac{e^{i\bar{k}(R_2 - R_1)}}{R_1 R_2} d^2 r'_1 d^2 r'_2 \quad (5-10)$$

Pod pretpostavkom da se otvorena površina  $\mathcal{A}$  poklapa sa izvorom svjetlosti  $\mathcal{G}$  za bilo koje dvije točke  $S_1(\mathbf{r}'_1)$  i  $S_2(\mathbf{r}'_2)$  na izvoru vrijedi  $J(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = I(\mathbf{r}'_1) \delta^{(2)}(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1)$  gdje je  $I(\mathbf{r}'_1)$  intenzitet u točki  $\mathbf{r}'_1$  a  $\delta^{(2)}$  dvodimenzionalna Diracova delta funkcija. U prijevodu to znači da su bilo koja dva elementa izvora međusobno nekoherentna. Nadalje slijedi:

$$J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathcal{G}} I(\mathbf{r}') \frac{e^{i\bar{k}(R_{2S} - R_{1S})}}{R_{1S} R_{2S}} d^2 r' \quad (5-11)$$

Kompleksni stupanj koherentnosti polja generiranog od strane prostorno nekoherentnog izvora je tada:

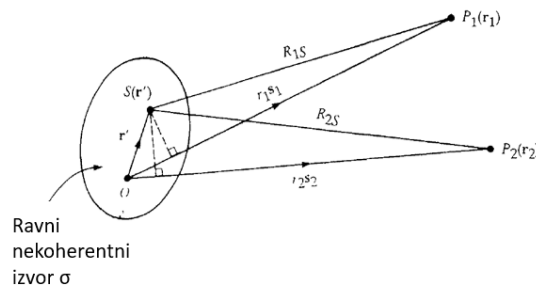
$$\tilde{\gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = \frac{1}{\sqrt{I(\mathbf{r}_1)}\sqrt{I(\mathbf{r}_2)}} \left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathcal{G}} I(\mathbf{r}') \frac{e^{i\bar{k}(R_{2S} - R_{1S})}}{R_{1S} R_{2S}} d^2 r' \quad (5-12)$$

Zadnja formula jest matematička formulacija van Cittert-Zernikeovog teorema te daje kompleksni stupanj koherentnosti u terminima raspodjele intenziteta preko izvora i



intenziteta u točkama  $P_1(\mathbf{r}_1)$  i  $P_2(\mathbf{r}_2)$ . Isti integral javlja se i prilikom računanja difrakcijskog uzorka pa van Cittert-Zernikeov teorem zapravo govori da je  $\tilde{\gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)$  jednak normaliziranoj kompleksnoj amplitudi u  $P_2(\mathbf{r}_2)$  u difrakcijskom uzorku kojeg stvara monokromatski sferni val frekvencije  $\frac{\bar{k}c}{2\pi}$  koji konvergira u točki  $P_1(\mathbf{r}_1)$  tako da će postojati Fraunhoferov uzorak centriran u  $P_1$ , a difrakcija se odvija na pukotini istog oblika, dimenzija i lokacije poput nekoherentnog izvora, dok je distribucija amplitude na pukotini proporcionalna distribuciji intenziteta preko izvora. Odnosno, za proizvodnju područja s visokim stupnjem koherentnosti korištenjem toplinskog izvora treba raditi samo unutar područja Fraunhoferovog centralnog maksimuma kojeg bi proizvela pukotina istih karakteristika na dalekom zaslonu.

Teorem se može i pojednostaviti u slučaju kad točke  $P_1(\mathbf{r}_1)$  i  $P_2(\mathbf{r}_2)$  leže na velikim udaljenostima od izvora. Neka je geometrija problema jednaka onoj na slici 5.4.



Slika 5.4. Koordinatni sustav korišten u izvodu pojednostavljenog van Cittert-Zernikeovog teorema. (preuzeto iz literature [3])

Ishodište  $O$  leži na izvoru, a  $\mathbf{s}_1$  i  $\mathbf{s}_2$  predstavljaju jedinične vektore tako da vrijedi  $\mathbf{r}_1 = r_1 \mathbf{s}_1$  i  $\mathbf{r}_2 = r_2 \mathbf{s}_2$ . Uz aproksimaciju  $R_{1S} \sim r_1 - \mathbf{s}_1 \mathbf{r}'$ ,  $R_{2S} \sim r_2 - \mathbf{s}_2 \mathbf{r}'$  izrazi (5-11) i (5-12) prelaze u:

$$J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2 \frac{e^{i\bar{k}(r_2-r_1)}}{r_1 r_2} \int_{\mathcal{G}} I(\mathbf{r}') e^{-i\bar{k}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) \mathbf{r}'} d^2 r' \quad (5-13)$$

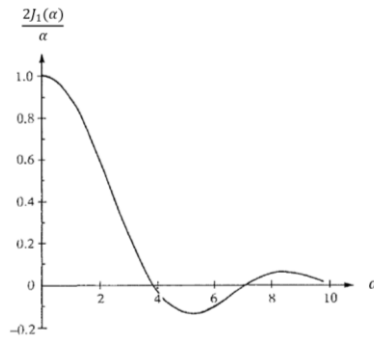
$$\tilde{\gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = e^{i\bar{k}(r_2-r_1)} \frac{\int_{\mathcal{G}} I(\mathbf{r}') e^{-i\bar{k}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) \mathbf{r}'} d^2 r'}{\int_{\mathcal{G}} I(\mathbf{r}') d^2 r'} \quad (5-14)$$

Dakle, kad točke  $P_1(\mathbf{r}_1)$  i  $P_2(\mathbf{r}_2)$  leže na velikim udaljenostima od izvora, veličine  $J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  i  $\tilde{\gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)$  se mogu izraziti kao Fourierovi transformati intenziteta preko izvora.

Ukoliko se na primjer radi o kružnom izvoru radijusa  $a$  s ishodištem  $O$  u centru izvora, i s konstantnim intenzitetom  $I(\mathbf{r}') = konst.$  i ako je  $r_1 = r_2 = r$ , tada je rješenje zadnje jednadžbe:

$$\tilde{\gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = \frac{2J_1(\alpha)}{\alpha} \quad (5-15)$$

gdje je  $\alpha = \bar{k}a|\mathbf{s}_{2\perp} - \mathbf{s}_{1\perp}|$ ,  $\mathbf{s}_{2\perp}$  i  $\mathbf{s}_{1\perp}$  su projekcije (dvodimenzionalni vektori) vektora  $\mathbf{s}_1$  i  $\mathbf{s}_2$  na ravninu izvora, a  $J_1$  Besselova funkcija prvog reda. Iz  $\mathbf{s}_{1\perp} = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{y_1}{r}, 0\right)$ ,  $\mathbf{s}_{2\perp} = \left(\frac{x_2}{r}, \frac{y_2}{r}, 0\right)$  slijedi  $\alpha = \bar{k} \frac{a}{r} d_{12} = \bar{k} \frac{a}{r} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  gdje je  $d_{12}$  udaljenost između točaka  $P_1(\mathbf{r}_1)$  i  $P_2(\mathbf{r}_2)$ . Ovisnost kompleksnog stupnja koherentnosti o varijabli  $\alpha$  prikazana je na slici 5.5.



Slika 5.5. Ovisnost kompleksnog stupnja koherentnosti o varijabli  $\alpha$ . (preuzeto iz literature [3])

Prva nula funkcije (potpuna nekoherentnost) javlja se pri vrijednosti parametra  $\alpha = 3,83$ , odnosno pri udaljenosti točaka  $P_1(\mathbf{r}_1)$  i  $P_2(\mathbf{r}_2)$  u vrijednosti:

$$d_{12} = \frac{3,83}{\bar{k}} \frac{r}{a} = \frac{0,61r\bar{\lambda}}{a} \quad (5-16)$$

koja odgovara transverzalnoj koherentnoj širini. Kako se točke još više udaljavaju, kompleksni stupanj koherentnosti ponovno počinje rasti no faza mu se mijenja za  $\pi$  pošto Besselova funkcija mijenja predznak nakon prolaska kroz svaku nulu funkcije. U praksi su od idealne vrijednosti dopuštena odstupanja od 12 % bez da postanu značajna pa je svjetlost u dalekoj zoni proizvedena od takvog kružnog izvora približno koherentna na kružnoj površini od  $\Delta A = 0,063r^2\bar{\lambda}^2/S$  gdje je  $S$  površina izvora.

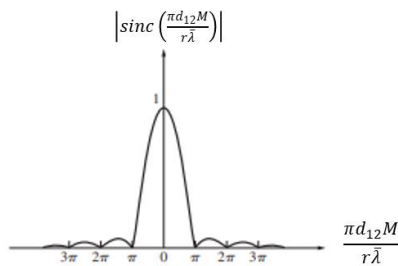
Ukoliko se radi o linijskom izvoru duljine  $M$ , uz ishodište  $O$  smješteno u sredini izvora te uz  $r_1 = r_2 = r$  i jednoliki intenzitet  $I(x') = konst.$  kompleksni stupanj koherentnosti prema van Cittert-Zernikeovom teoremu glasi:

$$\tilde{\gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = \frac{\int_{\mathcal{G}} I(x') e^{i\bar{k} \frac{d_{12}}{r} x'} dx'}{\int_{\mathcal{G}} I(x') dx'} \quad (5-17)$$

gdje je  $r$  udaljenost od izvora do zaslona s pukotinama, a  $d_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  udaljenost između točaka  $P_1(\mathbf{r}_1)$  i  $P_2(\mathbf{r}_2)$ . Vidljivost pruga je u tom slučaju jednaka:

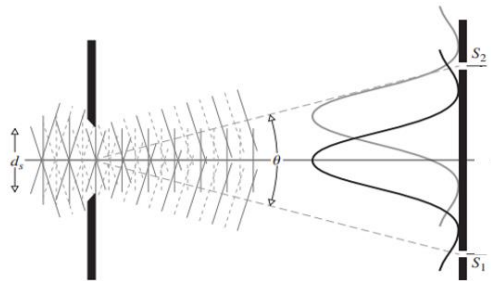
$$|\tilde{\gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)| = \left| \text{sinc} \left( \frac{\pi d_{12} M}{r \lambda} \right) \right| \quad (5-18)$$

Funkcija *sinc* definira se kao  $\text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin(x)}{x}$ . Ovisnost stupnja koherentnosti o varijabli  $\frac{\pi d_{12} M}{r \lambda}$  prikazana je na slici 5.6.



Slika 5.6. Ovisnost funkcije  $\left| \text{sinc} \left( \frac{\pi d_{12} M}{r \lambda} \right) \right|$  o varijabli  $\frac{\pi d_{12} M}{r \lambda}$ . (preuzeto iz literature [1])

Intuitivno objašnjenje teorema može se dati na sljedeći način. Na slici 5.7. je prikazan postav Youngovog eksperimenta s pukotinom promjera  $d_s$  kao primarnim izvorom koja se ponaša kao prošireni izvor prema van Cittert-Zernikeovom teoremu.



Slika 5.7. Youngov eksperiment sa primarnom pukotinom duljine  $d_s$  i prvi difrakcijski maksimum. (preuzeto iz literature [1])

Ukoliko je pukotina obasjana ravnim valovima koji početno putuju paralelno s njom, pukotina bi reemitirala svjetlost u stožac i proizvodila Fraunhoferov uzorak na udaljenom zaslonu, sa središnjim maksimumom koji ispunjava kut  $\theta \approx \frac{\bar{\lambda}}{d_s}$ . Ako je  $d_s$  mali,  $\theta$  je velik i središnji maksimum obasjava obje sekundarne pukotine rezultirajući visokim stupnjem

koherentnosti na pukotinama. Valovi koji ne upadaju paralelno na pukotinu proizvode difrakcijske uzorke pomaknute od centralne osi, ali i dalje centralni maksimum zahvaća obje pukotine. Ako je  $d_s$  velik,  $\theta$  je mali i ako je širina centralnog maksimuma upravo jednaka razmaku među sekundarnim pukotinama interferencijskog uzorka nema jer minimumi difrakcijskog uzorka upadaju točno na dvije pukotine te do njih ne dolazi nikakva svjetlost. Valovi koji ne upadaju paralelno tad osvjetljavaju samo jednu od sekundarnih pukotina, a drugu ne, te koherentnost na sekundarnim pukotinama iščezava, a time i Youngovi uzorci. Daljnjim povećanjem dimenzija pukotine difrakcijski maksimum drugog reda ponovno osvjetljava obje pukotine, Youngov uzorak se vraća no slabijeg intenziteta.

Učinak povećanja koherentnosti s propagacijom od izvora što dalje u vremenu i prostoru vidljiv u svakodnevnom životu snimljen je na slici 5.8. na primjeru pataka.



*Slika 5.8. Propagacija valova na vodi u četiri vremenska okvira. Na početku patke skaču u vodu tvoreći nepovezane poremećaje. Kako poremećaji dalje propagiraju u vremenu i prostoru njihova povezanost raste. Patke su proizvele prostorno koherentno polje preko velikog područja. (preuzeto iz literature [4])*

Na slici 5.8.a 13 pataka skače u vodu tvoreći međusobno nekoherentne valove. Patke u ovom slučaju reprezentiraju toplinski izvor. Na slici 5.8.d vidljivo je da nakon duljeg vremena i nakon što su se valovi udaljili od pataka, valovi postaju visoko povezani i uređeni. Tako su patke proizvele prostorno koherentno polje preko velikog područja na vodi.

## 6. ZAKLJUČAK

Koherentnost se može promatrati kao sposobnost svjetlosti da proizvodi interferencijske uzorke. Ona je mjera korelacije između dva poremećaja, a kvantitativno se opisuje stupnjem koherentnosti i vidljivošću uzorka. Svjetlost koja nije savršeno koherentna (parcijalno koherentna svjetlost) svejedno proizvodi interferencijske uzorke no manje razlučivosti. Efekti vremenske koherentnosti opisuju ovisnost koherentnosti o širini frekventnog pojasa izvora čija se recipročna vrijednost definira kao koherentno vrijeme. Vremenska koherentnost govori o korelaciji dva identična poremećaja kad se između njih uspostavi vremenski razmak. Visok stupanj korelacije se javlja ukoliko je vremenski razmak manji od koherentnog vremena. Efekti prostorne koherentnosti opisuju ovisnost koherentnosti o dimenzijama izvora, odnosno korelaciju između poremećaja u dvjema različitim točkama prostora u istom trenutku. U tim točkama postoji to veći stupanj korelacije što je udaljenost točaka od izvora veća, a dimenzija izvora manja.

Promjene u koherentnosti koje se javljaju kako svjetlost propagira dalje od izvora posljedica su činjenice da zajednička koherentna funkcija zadovoljava valne jednadžbe koje vežu efekte vremenske i prostorne koherentnosti. Tako međusobno nekoherentni izvori ipak mogu generirati prostorno koherentno polje preko velikog područja. Zakoni propagacije olakšavaju i račun kompleksnog stupnja koherentnosti, a iz njih proizlazi i van Cittert Zernikeov teorem koji povezuje koherentnost svjetlosti generiranu proširenim izvorom s difrakcijskim uzorkom na pukotini istih karakteristika poput proširenog izvora. Kompleksni stupanj koherentnosti je tako dan u terminima Besselove funkcije prvog reda kod kružnog, odnosno *sinc* funkcije kod linijskog izvora svjetlosti.

Teorija optičke koherentnosti pronašla je primjenu u mnogim područjima. To su, na primjer, zvjezdana interferometrija koja se bavi mjerenjem malih kutnih dimenzija nebeskih tijela i optička koherencijska tomografija što je postupak laserskog snimanja slojeva mrežnice, vidnog živca i rožnice korišten u medicini.

## LITERATURA

- [1] E. Hecht, Optics, Pearson Education, peto izdanje, 2017
- [2] G. R. Fowles, Introduction to modern optics, Dover Publications, New York, drugo izdanje, 1989
- [3] L. Mandel, E. Wolf, Optical coherence and quantum optics, Cambridge University Press, 1995
- [4] W. H. Knox, M. Alonso, E. Wolf, Spatial coherence from ducks, Physics today, 2010, 63, 3, 11, URL: <https://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/1.3366225>
- [5] <https://rafael-fuente.github.io/visualizing-the-concept-of-spatial-coherence-the-double-slit-experiment-with-incoherent-and-coherent-light.html#references> (5.9.2022.)
- [6] T. Gfroerer, M. Bergthold, Laser diode coherence, American Journal of Physics, 2020, 88, 740
- [7] A. T. Forrester, On Coherence Properties of Light Waves, American Journal of Physics, 1956, 24, 192
- [8] L. Basano, C. Pontiggia, E. Piano, Simple demonstrations for introducing spatial coherence, American Journal of Physics, 1996, 64, 1257
- [9] F. L. Pedrotti, S. J., L. M. Pedrotti, L. S. Pedrotti, Introduction to Optics, Benjamin Cummings, 2006
- [10] A. Lipson, S. G. Lipson, H. Lipson, Optical Physics, Cambridge University Press, četvrto izdanje, 2011
- [11] M. Françon, Diffraction Coherence in Optics, Pergamon Press, prvo izdanje, 1966