

# Foton - foton raspršenje pri narušenoj Lorentzovoj simetriji

---

Vrban, Fran Ivan

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:194:385779>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-23**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Physics - PHYRI Repository](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

FAKULTET ZA FIZIKU



# Foton–foton raspršenje pri narušenoj Lorentzovoj simetriji

Fran Ivan Vrban

Diplomski rad

Rijeka, 2022.



SVEUČILIŠTE U RIJECI

FAKULTET ZA FIZIKU

Diplomski sveučilišni studij Fizika

Astrofizika i fizika elementarnih čestica



# Foton–foton raspršenje pri narušenoj Lorentzovoj simetriji

Fran Ivan Vrban

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Tomislav Terzić

Rijeka, 2022.



## Sažetak

Lorentzova simetrija je jedna od fundamentalnih simetrija u modernoj fizici, ipak, određeni modeli kvantne gravitacije upućuju na mogućnost narušenja iste. Jedan od mogućih načina detekcije narušenja Lorentzove simetrije omogućuje foton–foton raspršenje gama-zrake na ekstragalaktičkom pozadinskom zračenju. U ovom radu analizira se foton–foton raspršenje u kontekstu standardne i proširene teorije kvantne elektrodinamike. Dan je pregled izvoda Fermijevog zlatnog pravila i udarnog presjeka za foton–foton raspršenje u standardnoj kvantnoj elektrodinamici. Promotrena je ovisnost udarnog presjeka uz pretpostavku modificirane kinematike procesa. Pomoću modela proširene kvantne elektrodinamike proučava se utjecaj dinamičkih promjena na udarni presjek za foton–foton raspršenje. Analiziran je izvod udarnog presjeka u limesu visokih energija gama-zrake. Izračunat je standardni udarni presjek u laboratorijskom sustavu i dan je opći oblik udarnog presjeka dvočestičnog raspršenja. Primjenjujući dobivene rezultate, odbacuje se ultrarelativistička aproksimacija čime je račun za modificirani udarni presjek za foton–foton raspršenje precizniji u području svih energija. Proučena je kinematika raspršenja u laboratorijskom sustavu.

**Ključne riječi:** narušenje Lorentzove simetrije, foton–foton raspršenje, laboratorijski sustav, udarni presjek



# Abstract

Lorentz symmetry is one of the fundamental symmetries in modern physics, however, certain models of quantum gravity point to the possibility of its violation. One possible way of detecting Lorentz symmetry breaking is provided by photon–photon scattering of gamma-rays on the extragalactic background radiation. In this thesis, photon–photon scattering is analyzed in the context of the standard and extended theory of quantum electrodynamics. An overview of the derivation of Fermi’s golden rule and the cross section of photon–photon scattering in standard quantum electrodynamics is given. The analysis of the cross section with the modified reaction threshold is done. Using the model of extended quantum electrodynamics, the influence of dynamic changes on the impact cross section for photon–photon scattering is studied. The cross section in the ultra–relativistic approximation is analyzed. The standard cross section in the laboratory system is calculated and the general form of the cross section of two-particle scattering is given. Applying the obtained results, the ultra–relativistic approximation is discarded, which makes the calculation for the modified cross section for photon—photon scattering more accurate in the range of all energies. The kinematics of scattering in a laboratory system was studied.

**Key words:** Lorentz invariance violation, photon–photon scattering, local reference frame, cross section





# Sadržaj

<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Narušenje Lorentzove simetrije i testiranja</b>	<b>5</b>
1.1 Modificirana disperzijska relacija . . . . .	5
1.2 Testiranja narušenja Lorentzove simetrije . . . . .	6
<b>2 Foton–foton raspršenje i modifikacija praga reakcije</b>	<b>9</b>
2.1 Fermijevo zlatno pravilo za raspršenje . . . . .	10
2.2 Udarni presjek za foton–foton raspršenje . . . . .	17
2.3 Udarni presjek za foton–foton raspršenje uz modificirani prag reakcije . . . . .	24
<b>3 Foton–foton raspršenje u teoriji s operatorima narušenja Lorentzove simetrije</b>	<b>31</b>
3.1 Kvantna elektrodinamika s operatorima narušenja Lorentzove simetrije . . . . .	32
3.2 Modificirani udarni presjek u limesu visokih energija . . . . .	37
3.3 Standardni udarni presjek u laboratorijskom sustavu . . . . .	52
3.4 Korekcija modificiranog udarnog presjeka fotonskih modifikacija . . . . .	56
3.5 Dodatni komentari . . . . .	65
<b>Zaključak</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>69</b>



# Uvod

Kvantni opis gravitacije je jedan od najvećih zagonetki moderne fizike. Opća teorija relativnosti, trenutno najuspješniji opis gravitacije, slama se u ekstremnim uvjetima poput singulariteta crnih rupa te je stoga očekivan fundamentalniji opis gravitacije. Također, sama evolucija svih grana fizike kroz povijest ukazuje na kontinuirano razvijanje razumijevanja prirode, gravitacija ne bi trebala biti iznimka. Budući da su sve ostale tri fundamentalne sile prirode uspješno kvantizirane, u narednoj budućnosti je očekivana kvantizacija gravitacije čime bi se produbilo naše shvaćanje prirode kako na najvećim tako i na najmanjim skalama. Unatoč iznimnom naporu zajednice proteklih stotinjak godina i dalje ne postoji potpun model koji opisuje kvantizaciju gravitacije. Jedan od razloga takvog stanja leži u činjenici da su relevantni eksperimentalni podaci veoma oskudni. Prepostavlja se da se razina energije na kojoj se manifestiraju efekti kvantne gravitacije nalazi u području Plankove energije  $E_{PL} = 1.22 \cdot 10^{19}$  GeV [25], što je 15 redova veličine veće od maksimalne energije dostupne u najjačem zemaljskom akceleratoru čestica LHC [1]. Samim time očito je da zemaljski akceleratori čestica trenutno nisu mjesto na kojem se mogu očekivati mjerenja efekata kvantne gravitacije. Iz tog razloga moderna potraga za detekcijom fenomena kvantne gravitacije se pretežito fokusira na astrofizičke izvore; aktivne galaktičke jezgre, pulsare i bljeskove gama-zraka koji mogu ubrzavati čestice do energija  $10^{11}$  GeV [9]. Prepostavlja se da se visokoenergetskim česticama može doprijeti do najmanjih struktura prostor-vremena gdje kvantne fluktuacije kreiraju dinamički medij nazvan prostor-vremenska "pjena", pojam kojeg je skovao J.A. Wheeler [31]. Velika udaljenost astrofizičkih objekata također omogućuje indirektnu detekciju fenomena kvantne

gravitacije uslijed akumulacije efekata tijekom propagacije čestica. Iako ne postoji jedinstven pristup prema teoriji kvantne gravitacije, razne ideje i modeli vezani za kvantnu gravitaciju predlažu da fundamentalna simetrija Specijalne teorije relativnosti, Lorentzova simetrija, nije potpuno očuvana na energijama Plankove skale. Narušenje Lorentzove simetrije bi tada bilo prisutno i na puno manjim energijama, ali bi efekti narušenja bili snažno potisnuti radi čega je onemogućena detekcija na tim skalama. Većina teorija narušenja Lorentzove simetrije uvode male fenomenološke članove Lorentzovog narušenja u osnovne relacije teorija poput gustoće Lagranžijana iz čega mogu slijediti modifikacije disperzijskih relacija pomoću kojih se predviđaju odstupanja od standardne teorije. Modifikacija disperzijske relacije je uobičajena početna točka razmatranja narušenja Lorentzove simetrije čime se modeliraju kinematičke promjene sustava. Određene vrste narušenja Lorentzove simetrije pretpostavljaju postojanje preferiranog inercijalnog referentnog sustava u kojem se obavljaju sve kalkulacije što postavlja fundamentalna ograničenja na fizikalne zakone [13]. Takvom vrstom Lorentzovog narušenja ćemo se baviti u ovom radu. Preferirani inercijalni sustav se definira kao jedini referentni sustav gdje je propagacija svjetla izotropna, za razliku od svih ostalih referentnih okvira [13]. Razlog postojanja preferiranog inercijalnog referentnog sustava počiva na modifikacijama transformacija između referentnih sustava koje narušenjem Lorentzove simetrije postaju netrivialne. Takva teorija narušenja Lorentzove simetrije je bazirana na istim principima kao i standardna teorija relativnosti uz generalizaciju postulata univerzalnosti brzine svjetlosti pomoću slobode u formulaciji principa. Točna razina odstupanja od Lorentzove simetrije razlikuje se za razne modele kvantne gravitacije pa bi detekcija narušenja Lorentzove simetrije postavila ograničenja na potencijalne teorije kvantne gravitacije.

Cilj ovog rada jest istraživanje utjecaja narušenja Lorentzove simetrije na udarni presjek za foton–foton raspršenje. S obzirom da efekti narušenja Lorentzove simetrije modificiraju udarni presjek za foton–foton raspršenje, omogućena je potencijalna detekcija narušenja simetrije putem signala udaljenih astrofizičkih izvora što je opisano u poglavlju 1. U poglavlju 2 formulirat će se općeniti opis raspršenja u standardnoj kvantnoj elektrodinamici i izračunati udarni presjek za foton–foton

raspršenje. Nadalje, proučavat će se kinematičke modifikacije praga reakcije pomoću modificirane disperzijske relacije fotona. Konačno, u poglavlju 3 analizirat će se dinamičke modifikacije za foton–foton raspršenje u okviru proširene kvantne elektrodinamike s operatorima Lorentzovog narušenja. Opisuju se Feynmanova pravila teorije i računa se modificirani udarni presjek u limesu visokih energija gama-zrake prateći [27], pri čemu će se obratiti pažnja na izbor aproksimacija u radu. Koristeći parametrizaciju kinematike rada [27], izračunat će se egzaktni udarni presjek za foton–foton raspršenje pri očuvanoj Lorentzovoj simetriji u laboratorijskom sustavu. Konačno, u kontekstu proširene teorije kvantne elektrodinamike uz zanemarivanje fermionskih modifikacija, odbacuje se ultrarelativistička aproksimacija što udarni presjek za foton–foton raspršenje čini preciznijim u području svih energija gama-zrake.



# Poglavlje 1

## Narušenje Lorentzove simetrije i testiranja

### 1.1 Modificirana disperzijska relacija

Disperzijska relacija, tj. njena modifikacija, jest uobičajena početna točka prilikom razmatranja efekata narušenja Lorentzove simetrije. U određenim pristupima modifikacija disperzijske relacije proizlazi direktno iz Lagranžijana teorije [25], ali fenomenološki gledano ako modifikacija već postoji, prikladno je modelirati odstupanje od standardne disperzijske relacije neovisno o danoj teoriji. U poglavlju 3 će se analizirati modifikacija disperzijske relacije u okviru konkretne teorije. Budući da ne postoji potpuna teorija kvantne gravitacije i da narušenje Lorentzove simetrije nije direktna posljedica iste, općenitom formulacijom modifikacije disperzijske relacije omogućuje se parametrizacija i modeliranje fenomena koji nisu predviđeni trenutnim teorijama prirode. Općenita modifikacija fotonske disperzijske relacije je dana pomoću reda

$$E_{mod}^2 = E_\gamma^2 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \left( \frac{E_\gamma}{E_{QG,n}} \right)^n \right], \quad (1.1.1)$$

gdje je  $E_\gamma = p^2 c^2$  standardna energija fotona, a  $E_{QG,n}$  je skala energije na kojoj efekti Lorentzovog narušenja, tj. kvantne gravitacije, postaju značajni za koju se pretpostavlja da je za  $n = 1$  reda veličine Planckove energije  $E_{PL} = 1.22 \times 10^{19}$  GeV. Treba imati na umu da je omjer  $E_\gamma/E_{QG,n}$  veoma malen čak i za gama-zrake najvećih energija. Uz postavljanje  $E_{QG,n} \rightarrow \infty$  za svaki  $n$  dolazimo do



standardne disperzijske relacije fotona. Članovi reda se eksperimentalno neovisno razmatraju, a uobičajeno se uzimaju samo prvi i drugi član reda modifikacije, budući da porastom reda članova opada njihov relativni značaj. Kako bi se zaokružio prostor parametrizacije jednadžbom (1.1.1), parametar  $S_n$  poprima vrijednosti  $\pm 1$ . Iz (1.1.1) slijedi jednadžba za grupnu brzinu fotona

$$v_\gamma = \frac{\partial E}{\partial p} \approx c \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \frac{n+1}{2} \left( \frac{E_\gamma}{E_{QG,n}} \right)^n \right], \quad (1.1.2)$$

dakle za vrijednosti parametra  $S = +1$  grupna brzina svjetlosti u vakuumu nadilazi brzinu  $c$  pa se takav slučaj naziva superluminalnim, dok za vrijednost  $S = -1$  grupna brzina svjetlosti biva manja od  $c$  te se takav slučaj naziva subluminalnim. U radu [23] se snažno eksperimentalno ograničila modifikacija disperzijske relacije za elektrone, donja granica na  $E_{QG,1}$  je postavljena na sedam redova veličine iznad  $E_{PL}$ , te se stoga za fermione uobičajeno uzima standardna disperzijska relacija.

## 1.2 Testiranja narušenja Lorentzove simetrije

Prvi koraci u mjerenju narušenja Lorentzove simetrije su učinjeni krajem prošlog stoljeća analiziranjem spektra aktivne galaktičke jezgre Markarian 421 za vrijeme velike aktivnosti (vidi [8]). Promatrala se razlika u vremenu dolaska fotona  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$  koja je uzrokovana različitim brzinama propagacije u ovisnosti o energiji koja je dana izrazom (1.1.2). Kako su efekti modifikacija kumulativni, velika udaljenost astrofizičkih objekata kompenzira malen omjer  $E/E_{QG,n}$  u izrazu (1.1.1) i omogućuje potencijalnu detekciju sa Zemlje. U radu se analizirao samo prvi red modifikacije disperzijske relacije i postavljena je granica na skalu energije kvantne gravitacije od  $E_{QG,1} > 4 \times 10^{16}$  GeV. Moderna istraživanja danas okupljaju velik broj znanstvenika u potrazi za narušenjem Lorentzove simetrije putem uočavanja ovisnosti grupne brzine fotona o energiji (vidi npr. [30] i pripadne reference). Uz aktivne galaktičke jezgre, predmeti promatranja ovakvog tipa istraživanja su najčešće pulsari i provale gama-zraka. Budući da su efekti Lorentzovog narušenja najizraženiji na najvišim energijama gama-zraka, Čerenkovljevi teleskopi specijalizirani za pro-

učavanje fotona u području energija GeV–TeV nude izvrsnu mogućnost proučavanja svih vrsta manifestacija narušenja Lorentzove simetrije [4].

Alternativna metoda istraživanja narušenja Lorentzove simetrije počiva na principu modificiranih fotonskih interakcija, gdje relacija (1.1.1) utječe na promjenu kinematike i dinamike raznih procesa. Određeni procesi koji su inače zabranjeni u kvantnoj elektrodinamici, poput raspada fotona u vakuumu, postaju dopušteni ako dozvolimo modifikaciju disperzijske relacije. Modificirane fotonske modifikacije omogućuju testiranje narušenja Lorentzove simetrije pomoću transparentnosti svemira. Godine 1997. je detektirana emisija gama-zračenja energije  $\approx 22$  TeV iz izvora Markarian 501 što je upućivalo da je svemir transparentniji za gama-zrake od očekivanog [3]. Gama-zrake najviših energija raspršuju se na pozadinskom zračenju niskih energija koje ispunjava čitav svemir radi čega se smanjuje tok zračenja udaljenih astrofizičkih izvora [10]. U pozadinsko zračenje se ubrajaju ekstragalaktičko pozadinsko zračenje (engl. Extragalactic Background Light - EBL), kozmičko mikrovalno pozadinsko zračenje i radio pozadina. Gama-zrake najviših energija, raspona  $10 - 10^5$  GeV se pretežito raspršuju na EBL fotonima energija od  $1 - 10^4$  meV [10]. Navedeni raspon gama-zraka odgovara području energija koje se mogu detektirati Čerenkovljevim teleskopima. Za modeliranje apsorpcije spektra astrofizičkih izvora radi raspršenja na EBL fotonima, nužno je precizno poznavanje spektra EBL (vidi npr. [19]). Spektar gama-zraka promatranog sa Zemlje se općenito modelira kao kombinacija intrinzičnog spektra i utjecaja apsorpcije na EBL

$$\Phi_{obs}(E) = \Phi_{int}(E(1 + z_s)) \times e^{-\tau(E, z_s)}, \quad (1.2.1)$$

gdje je  $E$  energija promatrane gama-zrake,  $z_s$  crveni pomak izvora, a  $\tau(E, z_s)$  je optička debljina dana kao [11]

$$\tau(E, z_s) = \int_0^{z_s} \frac{dl}{dz} dz \int_{-1}^1 \frac{1 - \cos \theta'}{2} d \cos \theta' \int_{\epsilon'_{th}}^{\infty} \sigma_{\gamma\gamma}(s) n(\epsilon', z) d\epsilon'. \quad (1.2.2)$$

U izrazu (1.2.2)  $\epsilon'$  predstavlja energiju EBL fotona u referentnom sustavu vezanom za objekt zra-

činja,  $n(\epsilon', z)$  je gustoća EBL fotona po jedinici enegrgije u istom sustavu. Vjerojatnost raspršenja je opisana udarnim presjekom  $\sigma_{\gamma\gamma}(s)$ , gdje je  $s$  kvadrat energije u sustavu centra mase. U području energija detektiranih Čerenkovljevim teleskopima je dominantan kanal foton–foton raspršenja je Breit-Wheelerov proces, tj. kreacija para elektron-pozitron. Kut interakcije između gama-zrake i EBL fotona opisan je kutom  $\theta'$ , a  $\epsilon'_{th}$  označava minimalnu energiju EBL fotona za koju je raspršenje dopušteno. Iz specijalne teorije relativnosti dolazi se do praga reakcije

$$\epsilon'_{th} = \frac{2m^2c^4}{E'(1 - \cos \theta')}, \quad (1.2.3)$$

gdje je  $E'$  energija gama-fotona. Razmatramo li ravnu  $\Lambda$ CDM kozmologiju imamo

$$\frac{dl}{dz} = \frac{c}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}, \quad (1.2.4)$$

gdje je  $H_0$  Hubbleova konstanta, a  $\Omega_m$  i  $\Omega_\Lambda$  parametri gustoće mase i tamne energije. Modifikacija disperzijske relacije fotona mijenja prag reakcije  $\epsilon'_{th}$  i kvadrat energije u sustavu centra mase  $s$  čime se modificira optička debljina kao što ćemo vidjeti u poglavlju 2. Detalji odnosa modificiranog praga reakcije i optičke debljine izvora su poblizje opisani u [30, 2]. S druge strane, dinamičke modifikacije narušenja Lorentzove simetrije koje direktno utječu na oblik udarnog presjeka  $\sigma_{\gamma\gamma}$  promatramo u poglavlju 3. Konačno, možemo zaključiti iz (1.2.1) da svaka promjena u optičkoj debljini  $\theta$  rezultira promjenom promotrenog spektra do na određenu skalu.

## Poglavlje 2

# Foton–foton raspršenje i modifikacija praga reakcije

Raspršenje čestica jest jedno od tri glavna izvora eksperimentalnih mjerenja u području elementarnih čestica uz raspade čestica i vezana stanja. Takvi fizikalni fenomeni predstavljaju prijelaze između različitih kvantnih stanja. U ovom radu se prvenstveno razmatra problem raspršenja čestica, konkretno raspršenja fotona. Općeniti problem raspršenja svodi se na pronalazak vjerojatnosti raznih konačnih stanja za dana početna stanja. Stopa prijelaza, tj. vjerojatnost prijelaza između različitih stanja u kvantnoj mehanici računa se pomoću Fermijeve zlatnog pravila, a veličina koja opisuje raspršenje je udarni presjek. Početna i konačna stanja se tretiraju kao sustav slobodnih čestica, te se stoga jedina fizikalna promjena odvija u području interakcije čestica. Tijekom cijelog rada, osim na mjestima gdje će se suprotno naglasiti, koristi se prirodan sustav jedinica  $c = \hbar = 1$ . Nakon izvoda Fermijeve zlatnog pravila za raspršenje u okviru standardne kvantne elektrodinamike, primjenjujemo pravilo za slučaj foton–foton raspršenja čime dolazimo do odgovarajućeg udarnog presjeka. Konačno, standardni udarni presjek modificiramo pomoću kinematičkih razmatranja pri narušenju Lorentzove simetrije.

## 2.1 Fermijevo zlatno pravilo za raspršenje

Označimo li početno stanje sustava raspršenja kao  $|i\rangle$  i konačno stanje kao  $|f\rangle$  (vidi npr. [6]), rezultat interakcije raspršenja je dan pomoću superpozicije stanja

$$\sum_f |f\rangle \langle f| S |i\rangle. \quad (2.1.1)$$

Sumacija se odvija preko raznih mogućih konačnih stanja  $|f\rangle$  koja čine potpun skup. Konačna stanja  $|f\rangle$  sadrže i početna stanja  $|i\rangle$  budući da je moguće da sustav ostane u početnom kvantnom stanju. Koeficijenti  $\langle f| S |i\rangle = S_{fi}$  koji stoje uz  $|f\rangle$  formiraju *matricu raspršenja* odnosno *S*-matricu. Kvadrati modula matričnih elemenata  $|S_{fi}|^2$  odgovaraju vjerojatnostima prijelaza iz raznih početnih stanja  $|i\rangle$  u moguća konačna stanja  $|f\rangle$ . Kako bi se pojednostavio račun, *S*-matricu možemo zapisati u obliku gdje izdvajamo jediničnu matricu

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi}, \quad (2.1.2)$$

gdje je  $T_{fi}$  matrica jednakih dimenzija kao i  $S_{fi}$ ,  $\delta_{fi}$  je jedinična matrica, a  $P_i$  i  $P_f$  predstavljaju sumu četvero-impulsa ulaznih, odnosno izlaznih čestica. Faktor Diracove delta funkcije osigurava zakon očuvanja četvero-impulsa prilikom interakcije čestica, dok su ostali faktori uz  $T_{fi}$  dodani radi prikladnosti u budućim fazama računa. Radi činjenice da nedijagonalni elementi matrice predstavljaju prijelaze između kvantnih stanja  $i \rightarrow f$ , a dijagonalni predstavljaju vjerojatnost ostanka u početnom kvantnom stanju  $i \rightarrow i$ , prilikom razmatranja prijelaza kvantnih stanja možemo zanemariti jediničnu matricu u (2.1.2). Slijedi veza između matrica *S* i *T*

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi}, \quad (2.1.3)$$

gdje matrični element  $T_{fi}$  nazivamo *amplitudom vjerojatnosti*. S obzirom da se prilikom računanja

vjerojatnosti prijelaza  $|S_{fi}|$  kvadrira, razmotrimo umnožak dviju delta funkcija. Prema definiciji, delta funkcija je jednaka

$$\delta^{(4)}(P_f - P_i) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(P_f - P_i)x} d^4x. \quad (2.1.4)$$

Radi prisutnosti druge delta funkcije u kvadratu, integral (2.1.4) se evaluira u  $P_f = P_i$ . Uzmemo li za područje integracije velik ali konačan volumen  $V$  i vremenski interval  $t$  slijedi

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x = \frac{Vt}{(2\pi)^4}. \quad (2.1.5)$$

Kvadrat modula  $S$ -matrice tada iznosi

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 Vt, \quad (2.1.6)$$

što ako podijelimo s  $t$ , dobivamo vjerojatnost prijelaza između početnog i konačnog stanja u jedinici vremena  $\omega$

$$\omega_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V.$$

Ukoliko je dostupno više konačnih stanja sa jednakim  $P_f$ , gornji izraz se množi s ukupnim brojem takvih stanja  $n$  pa slijedi

$$\omega_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 Vn. \quad (2.1.7)$$

Slobodne čestice u početnom i konačnom stanju su reprezentirane valnim funkcijama oblika ravnog vala određene amplitude  $u$ . Primjerice amplitudu elektrona predstavlja bispinor, a fotona četvero-vektor. Amplituda raspršenja  $T_{fi}$  za  $m$  čestica u početnom stanju i  $n$  čestica u konačnom je oblika

$$T_{fi} = u_1^* u_2^* \dots u_n^* Q u_1 u_2 \dots u_m, \quad (2.1.8)$$

gdje  $u_i^*$  predstavlja amplitudu valne funkcije čestice u konačnom stanju,  $u_i$  amplitudu valne funkcije čestice u početnom stanju, a  $Q$  je matrica koja povezuje indekse komponenti amplituda valnih

funkcija svih čestica. Matrica  $Q$  je zapravo ekvivalentna Hamiltonijanu interakcije koji uzrokuje prijelaze između kvantnih stanja. Općenito tokom rada, necrtane varijable predstavljaju ulazne čestice dok crtane predstavljaju izlazne čestice. Označimo s  $\mathbf{p}'_a$  impuls izlazne čestice, gdje indeks  $a$  označava čestice u konačnom stanju. Vrijedi  $\sum \mathbf{p}'_a = \mathbf{P}_f$ , a magnitudu impulsa  $\mathbf{p}'_a$  označavamo s  $p_a$ . Za dobivanje diferencijalnog oblika vjerojatnosti prijelaza, potrebno je pronaći broj stanja  $dn$  s rasponom impulsa  $p'_a \rightarrow p'_a + dp'_a$ . Koristimo *box* normalizaciju valnih funkcija početnih i konačnih stanja koje su reprezentirane pomoću ravnog vala

$$\psi(\mathbf{x}, t) = Ae^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)},$$

gdje  $A$  određuje normalizaciju valne funkcije. *Box* normalizacijom ravni val normaliziramo na jednu česticu po volumenu kocke stranice  $a$

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \psi^* \psi dx dy dz = 1$$

iz čega zaključujemo da je konstanta normalizacije  $A$  jednaka

$$A^2 = 1/a^3 = 1/V,$$

gdje je  $V$  volumen kocke stranice  $a$ . To implicira da prostorni dio valne funkcije ravnog vala zadovoljava periodične rubne uvjete na plohama kocke

$$\psi(x + a, y, z) = \psi(x, y, z).$$

Za prethodno definiranu valnu funkciju uvjet periodičnosti glasi  $e^{ip_x x} = e^{ip_x(x+a)}$  što kvantizira komponente impulsa

$$(p_x, p_y, p_z) = (n_x, n_y, n_z) \frac{2\pi}{a},$$

gdje su  $n_x, n_y$  i  $n_z$  cijeli brojevi. Dobivena kvantizacija komponenti impulsa ograničuje moguća stanja impulsa na diskretan skup. Slijedi da svako stanje impulsa u impulsnom faznom prostoru zauzima volumen od

$$d^3p = dp_x dp_y dp_z = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^3 = \frac{(2\pi)^3}{V}. \quad (2.1.9)$$

Broj ukupnih stanja za jednu česticu  $dn$  s magnitudom impulsa u rasponu  $p'_a \rightarrow p'_a + dp'_a$ , jednak je omjeru volumena impulsnog faznog prostora sferne ljuske radijusa  $p'_a$  debljine  $dp'_a$  i volumena jednog stanja, danog u izrazu (2.1.9)

$$dn = 4\pi p'_a{}^2 dp'_a{}^2 \times \left(\frac{(2\pi)^3}{V}\right)^{-1} = \frac{d^3 p'_a V}{(2\pi)^3}. \quad (2.1.10)$$

Za  $a$  čestica u konačnom stanju izraz (2.1.10) postaje

$$dn = \prod_a \frac{V d^3 p'_a}{(2\pi)^3}. \quad (2.1.11)$$

Diferencijalna vjerojatnost prijelaza po jedinici vremena  $\omega$  slijedi iz (2.1.7) i proporcionalna je broju stanja  $dn$ . Kombiniranjem (2.1.7) i (2.1.11) slijedi

$$d\omega = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V \prod_a \frac{V d^3 p'_a}{(2\pi)^3}. \quad (2.1.12)$$

Valne funkcije koje figuriraju u  $|T_{fi}|^2$  sadrže faktor  $1/\sqrt{2\epsilon V}$ , gdje je  $\epsilon$  energija čestice. Razlog toga jest normaliziranje valne funkcije na jednu česticu po volumenu  $V$ . Primjerice za elektron valna funkcija glasi

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon V}} u e^{-ipx}.$$

Korisno je stoga izmijeniti izraz za vjerojatnost prijelaza na način da se faktori normalizacije valnih funkcija ukomponiraju u faktor  $T_{fi}$ . Tada se kod valnih funkcija izostavlja faktor  $1/\sqrt{2\epsilon V}$ ,



a amplituda raspršenja izračunata za takve funkcije se označava s  $M_{fi}$  i povezana je s  $T_{fi}$  pomoću

$$T_{fi} = \frac{M_{fi}}{\sqrt{2\epsilon_1 V \dots 2\epsilon'_1 V \dots}}. \quad (2.1.13)$$

Razmotrimo slučaj dviju čestica u početnom stanju koje se prilikom raspršenja transformiraju u proizvoljan broj čestica. U tom slučaju izraz (2.1.13) postaje

$$T_{fi} = \frac{M_{fi}}{\sqrt{2\epsilon_1 V 2\epsilon_2 V 2\epsilon'_1 V 2\epsilon'_2 V \dots}}, \quad (2.1.14)$$

pa vjerojatnost prijelaza po jedinici vremena (2.1.12) glasi

$$d\omega = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |M_{fi}|^2 \frac{1}{4\epsilon_1 \epsilon_2 V} \prod_a \frac{d^3 p'_a}{(2\pi)^3 2\epsilon'_a}. \quad (2.1.15)$$

Dobiveni izraz (2.1.15) nije Lorentz invarijantan, što je poželjno svojstvo veličine koja opisuje raspršenje, zbog člana  $\frac{1}{4\epsilon_1 \epsilon_2 V}$  koji ovisi o izboru inercijalnog sustava. Lorentz invarijantna veličina koja opisuje raspršenje zvana udarni presjek  $\sigma$ , dobiva se tako da se  $d\omega$  podijeli s

$$j = \frac{I}{V \epsilon_1 \epsilon_2}, \quad (2.1.16)$$

gdje je  $I$  jednak

$$I = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \quad (2.1.17)$$

i odnosi se na ulazne čestice. Udarni presjek, odnosno Fermijevo zlatno pravilo za raspršenje dviju čestica u početnom stanju tada glasi

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |M_{fi}|^2 \frac{1}{4I} \prod_a \frac{d^3 p'_a}{(2\pi)^3 2\epsilon'_a}. \quad (2.1.18)$$

Iako je udarni presjek Lorentz invarijantan, moguće je generalizirati domenu korištenja izraza i

na teorije u kojima je Lorentzova simetrija narušena. Budući da za generalne teorije narušenja Lorentzove simetrije ne postoji globalni zakon transformacije između referentnih sustava [22], preporučljivo je u takvim teorijama čitav udarni presjek računati u jednom referentnom sustavu. Laboratorijski sustav je adekvatan izbor budući da se radi o referentnom inercijalnom sustavu iz kojeg mjerimo fenomen. Izraz (2.1.18) je izveden bez ikakvih pretpostavki izbora referentnog sustava, te je kao takav prikladna polazišna točka za razmatranje teorija narušene Lorentzove simetrije.

Udarni presjek (2.1.18) se može značajno pojednostaviti za slučaj dviju čestica u izlaznom kanalu. Izraz (2.1.18) za dvije izlazne čestice glasi

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |M_{fi}|^2 \frac{1}{4I} \frac{d^3\mathbf{p}'_1}{(2\pi)^3 2\epsilon'_1} \frac{d^3\mathbf{p}'_2}{(2\pi)^3 2\epsilon'_2}. \quad (2.1.19)$$

Računanje udarnog presjeka u standardnom, tj. Lorentz invarijantnom slučaju, se u velikoj mjeri pojednostavljuje u sustavu centra mase gdje razne simetrije omogućuju značajnu redukciju. Označimo četvero-impulse ulaznih čestica s  $k = (k^0, \mathbf{k})$  i  $q = (q^0, \mathbf{q})$ , a izlaznih s  $p_1 = (p_1^0, \mathbf{p}_1)$  i  $p_2 = (p_2^0, \mathbf{p}_2)$ . Neka je  $\epsilon = k^0 + q^0 = p_1^0 + p_2^0$  ukupna energija i neka su  $\mathbf{k} = -\mathbf{q} = \mathbf{p}$  i  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'$  početan i konačan impuls u sustavu centra mase. Mase označimo s  $m_k, m_q, m'_1$  i  $m'_2$ . Delta funkciju možemo razložiti na vremensku i prostornu komponentu

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 I} \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \delta(k^0 + q^0 - p_1^0 - p_2^0) |M_{fi}|^2 \frac{d^3\mathbf{p}_1}{p_1^0} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{p_2^0},$$

nakon čega prostornu delta funkciju  $\delta^{(3)}$  možemo eliminirati integracijom po  $d^3\mathbf{p}_2$

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 p_1^0 p_2^0 I} \delta(k^0 + q^0 - p_1^0 - p_2^0) |M_{fi}|^2 d^3\mathbf{p}_1. \quad (2.1.20)$$

Diferencijal  $d^3\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1^2 d|\mathbf{p}_1| d\Omega'$  zbog  $(p_1^0)^2 - m_1^2 = (p_2^0)^2 - m_2^2 = \mathbf{p}'^2$  i uz  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'$  se može zapisati

kao

$$d^3\mathbf{p}' = |\mathbf{p}'| \frac{p_1^0 p_2^0 d(p_1^0 + p_2^0)}{p_1^0 + p_2^0} d\Omega', \quad (2.1.21)$$

gdje je  $d\Omega'$  diferencijalni element prostornog kuta za  $\mathbf{p}'$ . Tada (2.1.20) postaje

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 I} \delta(k^0 + q^0 - p_1^0 - p_2^0) |M_{fi}|^2 |\mathbf{p}'| \frac{d(p_1^0 + p_2^0)}{p_1^0 + p_2^0} d\Omega'. \quad (2.1.22)$$

$I$  u sustavu centra mase uz korištenje standardne relativističke disperzijske relacije iznosi

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{(k^0 q^0 - \mathbf{k}\mathbf{q})^2 - m_k^2 m_q^2} \\ &= \sqrt{(k^0 q^0)^2 - 2k^0 q^0 \mathbf{k}\mathbf{q} + (\mathbf{k}\mathbf{q})^2 - [(k^0)^2 - \mathbf{k}^2][(q^0)^2 - \mathbf{q}^2]} \\ &= \sqrt{(k^0)^2 (\mathbf{q})^2 - 2k^0 q^0 \mathbf{k}\mathbf{q} + (q^0)^2 (\mathbf{k})^2} \\ &= |\mathbf{p}| \sqrt{(k^0)^2 + 2k^0 q^0 + (q^0)^2} \\ &= |\mathbf{p}| (k^0 + q^0), \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

gdje se u predzadnjem redu koristi  $\mathbf{k} = -\mathbf{q} = \mathbf{p}$ . Radi  $\epsilon = k^0 + q^0 = p_1^0 + p_2^0$  (2.1.22) postaje

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} \delta(k^0 + q^0 - p_1^0 - p_2^0) |M_{fi}|^2 \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}| \epsilon^2} d(p_1^0 + p_2^0) d\Omega'. \quad (2.1.24)$$

Delta funkciju eliminiramo integracijom po  $d(p_1^0 + p_2^0)$  te slijedi

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} |M_{fi}|^2 \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}| \epsilon^2} d\Omega'. \quad (2.1.25)$$

Dobiveni izraz je moguće pojednostaviti uz pretpostavku elastičnog raspršenja  $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 \epsilon^2} |M_{fi}|^2 d\Omega', \quad (2.1.26)$$

no radit ćemo s općim zapisom (2.1.25) radi generalizacije. U ovom trenutku prikladno je koristiti

invarijantnu Mandelstamovu varijablu  $t$

$$t = (k - p_1)^2 = m_k^2 + m_1'^2 - 2(kp_1) = m_k^2 + m_1'^2 - 2k^0 p_1^0 + 2|\mathbf{k}||\mathbf{p}_1| \cos \theta, \quad (2.1.27)$$

gdje je  $\theta$  kut između  $\mathbf{k}$  i  $\mathbf{p}_1$ . U sustavu centra mase iz (2.1.27) slijedi

$$dt = 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'|d \cos \theta, \quad (2.1.28)$$

pa  $d\Omega'$  u jednadžbi (2.1.25) glasi

$$d\Omega' = -d\phi d \cos \theta = \frac{d\phi d(-t)}{2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'|}, \quad (2.1.29)$$

gdje je  $\phi$  azimut od  $\mathbf{p}_1$  u odnosu na  $\mathbf{k}$ . Vrijedi  $d(-t) = dt$  do na ispravni izbor predznaka u diferencijalu. Uvrštavanjem (2.1.23) i (2.1.29) u (2.1.25) slijedi

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi} |M_{fi}|^2 \frac{dt d\phi}{I^2 2\pi}, \quad (2.1.30)$$

gdje je  $I = |\mathbf{p}|\epsilon$ . Izraz (2.1.30) je invarijantan pod onim Lorentzovim transformacijama koje drže  $\phi$  konstantnim, odnosno ne mijenjaju relativni smjer gibanja čestica. Ako je udarni presjek neovisan s obzirom na  $\phi$ , prethodni izraz se pojednostavljuje na

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi} |M_{fi}|^2 \frac{dt}{I^2}. \quad (2.1.31)$$

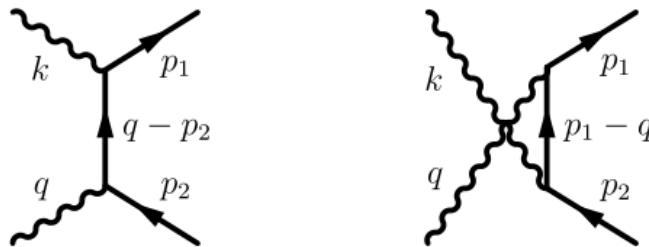
## 2.2 Udarni presjek za foton–foton raspršenje

Udarni presjek za foton–foton raspršenje  $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$  računa se pomoću pojednostavljenog izraza (2.1.31), pri čemu se pretpostavlja simetrija s obzirom na kut  $\psi$  radi osne simetrije problema čime

opravdavamo korištenje izraza. Razmatramo slučaj raspršenja dvaju fotona pri čemu se kreira par elektrona i pozitrona. U principu, moguća je kreacija i drugih parova fermiona poput miona i antimiona, ali su ti kanali raspršenja potisnuti zbog znatno veće mase čestica. Elektron i pozitron kao najlakši nabijeni fermioni predstavljaju dominantan kanal u foton–foton raspršenju. Zakon očuvanja četvero-impulsa sadržanog u delta funkciji izraza (2.1.12) za navedeno raspršenje dan je pomoću jednadžbe

$$k + q = p_1 + p_2, \quad (2.2.1)$$

gdje su  $k = (k^0, \mathbf{k})$  i  $q = (q^0, \mathbf{q})$  četvero-impulsi fotona prije raspršenja, a  $p_1 = (p_1^0, \mathbf{p}_1)$  i  $p_2 = (p_2^0, \mathbf{p}_2)$  četvero-impulsi elektrona i pozitrona nakon raspršenja. Karakter raspršenja sadržan je u amplitudi vjerojatnosti  $|M_{fi}|^2$  koja se računa uz pomoć Feynmanovih dijagrama. Amplitudu vjerojatnosti računamo u najnižem redu, gdje je proces reprezentiran pomoću "s" i "t" kanala raspršenja. Na Slici 2.1 prikazana su dva Feynmanova dijagrama za najniži red foton–foton raspršenja.



Slika 2.1: Feynmanovi dijagrami s i t-kanala za foton–foton raspršenje u najnižem redu. Vremenska os je usmjerena prema desno. Slika preuzeta iz [27]

Amplitude vjerojatnosti koje odgovaraju Feynmanovim dijagramima su dobivene standardnom procedurom kvantne elektrodinamike i iznose

$$M_1 = -4\pi e^2 \varepsilon_\mu(k) \varepsilon_\nu(q) \frac{1}{(q - p_2)^2 - m^2} \bar{u}(p_1) \gamma^\mu (\not{q} - \not{p}_2 + m) \gamma^\nu v(p_2) \quad (2.2.2)$$

$$M_2 = -4\pi e^2 \varepsilon_\mu(k) \varepsilon_\nu(q) \frac{1}{(p_1 - q)^2 - m^2} \bar{u}(p_1) \gamma^\mu (\not{p}_1 - \not{q} + m) \gamma^\nu v(p_2), \quad (2.2.3)$$

gdje je  $\varepsilon$  polarizacijski vektor,  $e$  jedinični naboj,  $u$  i  $v$  su amplitude valnih funkcija elektrona (bispinori) odnosno pozitrona,  $\bar{\psi}$  odgovara adjunkti spinora ( $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ , gdje je  $\dagger$  operator hermitske konjugacije). Tijekom rada koristi se Feynmanova pokrata  $\not{p} = \gamma_\mu p^\mu$  i Einsteinova konvencija  $\gamma_\mu p^\mu = \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu p^\mu$ . Ukupna amplituda vjerojatnosti  $M_{fi}$  jednaka je

$$M_{fi} = M_1 + M_2 = -4\pi e^2 \varepsilon_\mu(k) \varepsilon_\nu(q) \bar{u}(p_1) Q^{\mu\nu} v(p_2), \quad (2.2.4)$$

pri čemu matrica  $Q$  spomenuta u (2.1.8) iznosi

$$Q^{\mu\nu} = \frac{1}{(q - p_2)^2 - m^2} \gamma^\mu (\not{q} - \not{p}_2 + m) \gamma^\nu + \frac{1}{(p_1 - q)^2 - m^2} \gamma^\mu (\not{p}_1 - \not{q} + m) \gamma^\nu. \quad (2.2.5)$$

Nazivnici razlomaka elemenata matrice  $Q^{\mu\nu}$ , ali i budući raspis može se pojednostaviti pomoću Mandelstamovih varijabli. One u našem slučaju glase

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (k + q)^2 = 2m^2 + 2p_1 p_2 = 2kq \\ t &= (p_1 - k)^2 = (p_2 - q)^2 = m^2 - 2p_1 k = m^2 - 2p_2 q \\ u &= (p_1 - q)^2 = (p_2 - k)^2 = m^2 - 2p_1 q = m^2 - 2p_2 k, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

gdje je  $m$  masa elektrona. Matrica  $Q^{\mu\nu}$  tada glasi

$$Q^{\mu\nu} = \frac{1}{t - m^2} \gamma^\mu (\not{q} - \not{p}_2 + m) \gamma^\nu + \frac{1}{u - m^2} \gamma^\mu (\not{p}_1 - \not{q} + m) \gamma^\nu. \quad (2.2.7)$$

Kako bi se izračunao kvadrat amplitude vjerojatnosti, potrebno je pronaći kompleksno konjugiranu amplitudu vjerojatnosti. Prema svojstvima  $\gamma^0$  matrice,  $(\gamma^0)^2 = 1$  i  $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ , za općenitu matricu  $\Gamma$  i spinore  $u$  i  $v$  vrijedi (vidi npr. [21])

$$\begin{aligned} [\bar{u}(a) \Gamma u(b)]^* &= [u(a)^\dagger \gamma^0 \Gamma u(b)]^\dagger = u(b)^\dagger \Gamma^\dagger \gamma^{0\dagger} u(a) \\ &= [\bar{u}(b) \bar{\Gamma} u(a)]. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Kompleksni konjugat amplitude vjerojatnosti (2.2.4) je tada jednak

$$M_{fi}^* = -4\pi e^2 \varepsilon_\lambda^*(k) \varepsilon_\sigma^*(q) \bar{v}(p_2) \bar{Q}^{\lambda\sigma} u(p_1). \quad (2.2.9)$$

Matrica  $\bar{Q}^{\lambda\sigma}$  se može jednostavnije zapisati koristeći teorem o adjungiranju matrice koja sadrži produkt gama matrica

$$\Gamma = \gamma_a \gamma_b \dots \gamma_c \implies \bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 = \gamma_c \dots \gamma_b \gamma_a, \quad (2.2.10)$$

dokaz je trivijalan uz korištenje identiteta gama matrica. Kao posljedica teorema slijedi  $\bar{Q}^{\lambda\sigma} = Q^{\sigma\lambda}$  pa (2.2.9) postaje

$$M_{fi}^* = -4\pi e^2 \varepsilon_\lambda^*(k) \varepsilon_\sigma^*(q) \bar{v}(p_2) Q^{\sigma\lambda} u(p_1). \quad (2.2.11)$$

Uzevši u obzir prethodna razmatranja, kvadrat amplitude vjerojatnosti iznosi

$$|M_{fi}|^2 = M_{fi} M_{fi}^* = 16\pi^2 e^4 \varepsilon_\mu(k) \varepsilon_\nu(q) \varepsilon_\lambda^*(k) \varepsilon_\sigma^*(q) [\bar{u}(p_1) Q^{\mu\nu} v(p_2)] [\bar{v}(p_2) Q^{\sigma\lambda} u(p_1)]. \quad (2.2.12)$$

Uzmemo li prosjek po konfiguracijama spina ulaznih čestica i sumiramo preko konfiguracija spina izlaznih čestica, možemo primijeniti Casimirov trik nakon čega slijedi usrednjeni kvadrat amplitude vjerojatnosti

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = 4\pi^2 e^4 g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} \text{Tr}\{Q^{\mu\nu}(p_2 - m) Q^{\sigma\lambda}(p_1 + m)\}, \quad (2.2.13)$$

gdje je  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  metrički tenzor u prostoru Minkowskog. Kontrakcijom metričkih tenzora slijedi

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = 4\pi^2 e^4 \text{Tr}\{Q^{\mu\nu}(p_2 - m) Q_{\nu\mu}(p_1 + m)\} \quad (2.2.14)$$

iz čega je jasno da se problem određivanja usrednjenog kvadrata amplitude vjerojatnosti svodi na računanje traga. Uz pomoć činjenice da je trag umnoška neparnog broja gama matrica jednak nuli

i relacija

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu(a\gamma)\gamma^\mu &= -2(a\gamma) \\
\gamma_\mu(a\gamma)(b\gamma)\gamma^\mu &= 4(ab) \\
\gamma_\mu(a\gamma)(b\gamma)(c\gamma)\gamma^\mu &= -2(c\gamma)(b\gamma)(a\gamma) \\
\gamma_\mu(a\gamma)(b\gamma)(c\gamma)(d\gamma)\gamma^\mu &= 2[(d\gamma)(a\gamma)(b\gamma)(c\gamma) + (c\gamma)(b\gamma)(a\gamma)(d\gamma)] \\
\text{Tr}\{a\gamma)(b\gamma)\} &= 4ab \\
\text{Tr}\{a\gamma)(b\gamma)(c\gamma)(d\gamma)\} &= (ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc),
\end{aligned}$$

slijedi

$$\begin{aligned}
\langle |M_{fi}|^2 \rangle &= 128\pi^2 e^4 \left\{ \left( \frac{m^2}{t-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right)^2 + \left( \frac{m^2}{t-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \left( \frac{t-m^2}{u-m^2} + \frac{u-m^2}{t-m^2} \right) \right\}. \tag{2.2.15}
\end{aligned}$$

Rezultat je provjeren programskim paketom *FeynCalc* programa *Wolfram Mathematica*. Kako bi izračunali udarni presjek pomoću izraza (2.1.31), potrebno je pronaći  $I$ . Za foton–foton raspršenje prema (2.1.17) ono glasi

$$I = kq = \frac{1}{2}s \tag{2.2.16}$$

radi (2.2.6). Konačno, udarni presjek (2.1.31) uz (2.2.15) i (2.2.16) jednak je

$$\begin{aligned}
d\sigma &= 8\pi r_e^2 m^2 \frac{dt}{s^2} \left\{ \left( \frac{m^2}{t-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right)^2 + \left( \frac{m^2}{t-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \left( \frac{t-m^2}{u-m^2} + \frac{u-m^2}{t-m^2} \right) \right\}, \tag{2.2.17}
\end{aligned}$$

gdje je  $r_e = e^2/m^2$  klasični radijus elektrona. Za ukupnu energiju u sustavu centra mase danu varijablom  $s$ , domena varijacije varijable  $t$  je određena jednadžbom  $tu = m^4$  (vidi [6], poglavlje



67). U kombinaciji s relacijom  $s + t + u = 2m^2$  slijede granice integracije

$$m^2 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\sqrt{s(s-4m^2)} \leq t \leq m^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\sqrt{s(s-4m^2)}. \quad (2.2.18)$$

Integracijom (2.2.17) dobivamo izraz za totalni udarni presjek  $\sigma$

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{\tau^3} \left\{ \left( \tau^2 + \tau - \frac{1}{2} \right) \ln \left[ \frac{\sqrt{\tau} + \sqrt{\tau-1}}{\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau-1}} \right] - (\tau+1)\sqrt{\tau(\tau-1)} \right\}, \quad (2.2.19)$$

gdje je  $\tau = s/4m^2$ . Varijabla  $u$  je eliminirana pomoću relacije  $s + t + u = 2m^2$ . U sustavu centra mase vrijedi  $k^0 = q^0 = \omega$ ,  $p_1^0 = p_2^0 = \varepsilon$ ,  $\omega = \varepsilon$ . Koristeći definiciju varijable  $s$  danoj u (2.2.6), veličina  $\tau$  je jednaka

$$\tau = \frac{s}{4m^2} = \frac{2kq}{4m^2} = \frac{k^0q^0 - \mathbf{kq}}{2m^2} = \frac{\varepsilon^2}{m^2}, \quad (2.2.20)$$

radi  $k^0 = |\mathbf{k}|$ . Uvrstimo li  $\tau$  u izraz za totalni udarni presjek (2.2.19) imamo

$$\begin{aligned} \sigma &= \pi r_e^2 \frac{m^6}{\varepsilon^6} \left\{ \left( \frac{\varepsilon^4}{m^4} + \frac{\varepsilon^2}{m^2} - \frac{1}{2} \right) \ln \left[ \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + m^2}}{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + m^2}} \right] - \frac{\varepsilon(\varepsilon^2 - m^2)}{m^4} \sqrt{\varepsilon^2 - m^2} \right\} \\ &= \pi r_e^2 \frac{m^2}{\varepsilon^2} \left\{ \left( 1 + \frac{m^2}{\varepsilon^2} - \frac{m^4}{2\varepsilon^4} \right) \ln \left[ \frac{1 + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}}{\varepsilon}}{1 - \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}}{\varepsilon}} \right] - \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}}{\varepsilon} \left( 1 + \frac{m^2}{\varepsilon^2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \pi r_e^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon^2 - m^2}{\varepsilon^2} \right) \left\{ \left( 3 - \frac{(\varepsilon^2 - m^2)^2}{\varepsilon^4} \right) \ln \left[ \frac{1 + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}}{\varepsilon}}{1 - \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}}{\varepsilon}} \right] - 2 \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}}{\varepsilon} \left( 2 - \frac{\varepsilon^2 - m^2}{\varepsilon^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Primijetimo li da član  $\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}/\varepsilon$  odgovara brzini izlaznih fermiona  $\beta = |\mathbf{p}|/\varepsilon$ , dolazimo do jednostavnog zapisa totalnog udarnog presjeka

$$\sigma = \frac{1}{2} \pi r_e^2 (1 - \beta^2) \left\{ (3 - \beta^4) \ln \left[ \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right] - 2\beta(2 - \beta^2) \right\}, \quad (2.2.21)$$

što se slaže s [20], gdje je prvi put izračunat udarni presjek za foton–foton raspršenje. U proizvoljnom referentnom sustavu  $K$  gdje se dva fotona  $k$  i  $q$  gibaju u suprotnim smjerovima može

vrijediti  $k^0 \neq q^0$ . Iz invarijantnosti umnoška četvero-impulsa slijedi  $k^0 q^0 = \omega^2$ , gdje je kao i prije  $\omega$  energija fotona u sustavu centra mase. Kako je  $\omega^2$  jednaka umnošku energija fermiona  $\varepsilon^2$ , iz  $\beta = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}/\varepsilon$  dobivamo  $\omega = \varepsilon = m/\sqrt{1 - \beta^2}$ . Zaključujemo da se brzina fermiona u sustavu  $K$  pomoću energija fotona izražava pomoću jednadžbe

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{m^2}{k^0 q^0}}, \quad (2.2.22)$$

što se supstituira u izraz za totalni udarni presjek (2.2.21). U slučaju da se fotoni ne gibaju po istom pravcu u nekom referentnom sustavu  $K$ , prethodni rezultat se generalizira na

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{2m^2}{k^0 q^0 (1 - \cos \theta')}} \quad (2.2.23)$$

gdje je  $\theta'$  kut između impulsa fotona. Iz uvjeta pozitivnosti brzine zaključujemo da mora vrijediti  $k^0 q^0 (1 - \cos \theta') \geq 2m^2$ , tj. prag reakcije  $q^0$  za danu energiju fotona  $k^0$  iznosi

$$q^0 = \frac{2m^2}{k^0 (1 - \cos \theta')}. \quad (2.2.24)$$

Nužan uvjet za odvijanje procesa jest da ukupna energija fotona mora biti veća ili jednaka od  $(2mc^2)^2$ . Totalni udarni presjek (2.2.21) zapisan pomoću (2.2.23) glasi

$$\sigma = \frac{1}{2} \pi r_e^2 \frac{1}{a} \left[ \left( 2 + \frac{2}{a} - \frac{1}{a^2} \right) \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}}} \right] - \left( 2 + \frac{2}{a} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{a}} \right], \quad (2.2.25)$$

gdje je  $a = k^0 q^0 (1 - \cos \theta') / (2m^2 c^4) = s / (4m^2 c^4)$  nakon uvrštavanja brzine svjetlosti, gdje je  $s$  kvadrat ukupne energije u sustavu centra mase, tj. već spomenuta Mandelstamova varijabla.

## 2.3 Udarni presjek za foton–foton raspršenje uz modificirani prag reakcije

Totalni udarni presjek za foton–foton raspršenje mijenja svoj oblik razmotrimo li ga u okviru teorije narušene Lorentzove simetrije pri kojoj se modificira disperzijska relacija fotona (1.1.1). Analiziramo slučaj raspršenja gama-zrake na EBL fotonu, takav tip raspršenja je predmet astrofizičkih promatranja opisanih u poglavlju 1.1. Rad [23] je postavio snažna eksperimentalna ograničenja na modifikaciju disperzijske relacije elektrona te se stoga pri narušenju Lorentzove simetrije pretežito razmatra samo modifikacija disperzijske relacije fotona. Prisjetimo se da modificirana disperzijska relacija mijenja prag reakcije što uzrokuje promjenu spektra udaljenog astrofizičkog izvora prema (1.2.2). Kako će modificirana disperzijska relacija odstupati od standardne samo u slučaju fotona najviših energija radi omjera  $E/E_{QG,n}$ , gdje se za  $E_{QG,n}$  pretpostavlja da je najmanje reda veličine Planckove energije (vidi [29]), koristimo standardnu disperzijsku relaciju za EBL foton i (1.1.1) za gama-zraku. Napomenimo još jednom da se relacija (1.1.1) eksperimentalno promatra neovisno za svaki  $n$  pa ćemo iz tog razloga tako i teorijski analizirati problem. Označimo četvero-impuls EBL fotona s  $q$ , a četvero-impuls gama-zrake pomoću  $k$ . Prema [17], član modifikacije disperzijske relacije (1.1.1) gama-zrake efektivno predstavlja kvadrat mase fotona  $m_\gamma$  pa pod pretpostavkom valjanosti zakona očuvanja energije pri narušenoj Lorentzovoj simetriji u svim inercijalnim sustavima, kvadrat energije u sustavu centra mase  $s$  ima isti iznos u laboratorijskom sustavu kao i u sustavu centra mase. Kvadrat energije u sustavu centra mase  $s = m_k^2 + m_q^2 + 2kq$  tada postaje

$$s = 2q^0k^0(1 - \cos\theta') + S \left( \frac{k^0}{E_{QG,n}} \right)^n (k^0)^2, \quad (2.3.1)$$

gdje  $S = 1$  predstavlja superluminalan slučaj, a  $S = -1$  subluminalan. Izjednačavanjem (2.3.1) s

kvadratom ukupne energijom fermiona  $4m^2$ , prag reakcije (2.2.24) se modificira na sljedeći način

$$q_{min}^0 = \frac{2m^2}{k^0(1 - \cos \theta')} - \frac{S}{2(1 - \cos \theta')} \left( \frac{k^0}{E_{QG,n}} \right)^n (k^0), \quad (2.3.2)$$

što se između ostalog koristi u jednadžbi (1.2.2). Koristeći modificirani kvadrat energije u sustavu centra mase (2.3.1), varijabla  $a$  koja figura u izrazu za totalni udarni presjek (2.2.25) glasi

$$a = \frac{s}{4m^2} = \frac{k^0 q^0 (1 - \cos \theta')}{2m^2} + \frac{S}{4m^2} \left( \frac{k^0}{E_{QG,n}} \right)^n (k^0)^2. \quad (2.3.3)$$

Za  $n = 1$  varijabla  $a$  glasi

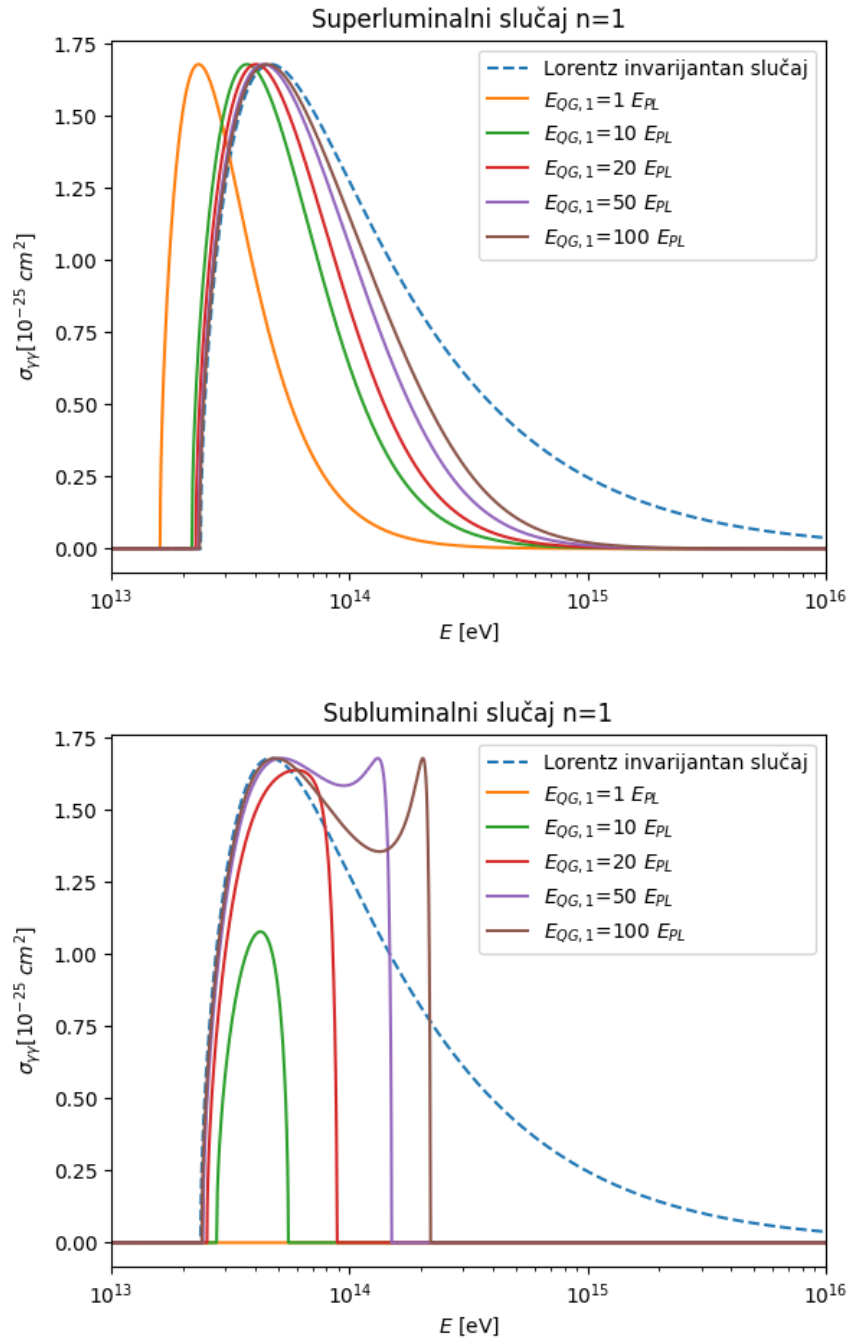
$$a = \frac{k^0 q^0 (1 - \cos \theta')}{2m^2} + \frac{S}{4m^2} \frac{(k^0)^3}{E_{QG,1}}, \quad (2.3.4)$$

što nakon supstitucije u (2.2.25) daje izraz za totalni udarni presjek za slučaja  $n = 1$ . Radi praktičnosti i jednostavnosti, za sve grafičke prikaze udarnih presjeka u radu razmatramo EBL foton energije  $q^0 = 11 \text{ meV}$  u raspršenju s gama-zrakom pod kutem od  $\theta' = \pi$ . Neovisno se prikazuju udarni presjeci za superluminalni ( $S = 1$ ) i subluminalni ( $S = -1$ ) slučaj za različite vrijednosti energija  $E_{QG,n}$ . Totalni udarni presjek za foton–foton raspršenje (2.2.25) za  $n = 1$  modifikaciju disperzijske relacije u ovisnosti o energiji gama-zrake prikazan je na Slici 2.2 gdje plava iscrtkana linija predstavlja udarni presjek u slučaju očuvane Lorentzove simetrije. Za  $n = 2$  varijabla  $a$  iznosi

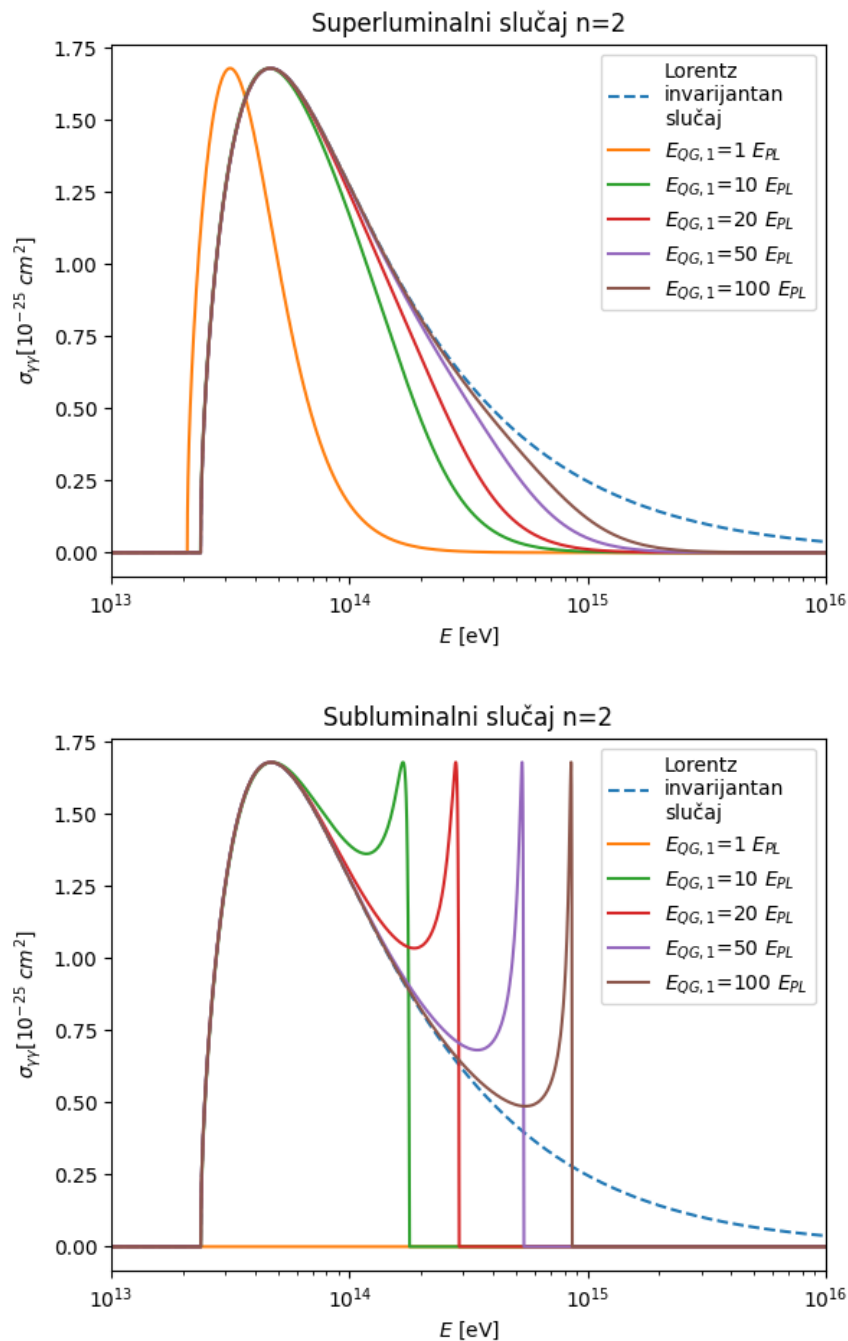
$$a = \frac{k^0 q^0 (1 - \cos \theta')}{2m^2} + \frac{S}{4m^2} \frac{(k^0)^4}{(E_{QG,2})^2}. \quad (2.3.5)$$

Totalni udarni presjek za foton–foton raspršenje (2.2.25) za  $n = 2$  modifikaciju disperzijske relacije u ovisnosti o energiji gama-zrake prikazan je na Slici 2.3 gdje također plava iscrtkana linija predstavlja udarni presjek u slučaju očuvane Lorentzove simetrije.

Napisan je kod *UdarniPresjeci* u programskom jeziku *Python* koji pronalazi pozicije prvog i drugog praga reakcije zajedno s pozicijama maksimuma svih udarnih presjeka prikazanih na slikama 2.2 i 2.3. Također kod određuje vrijednost  $E_{QG}$  na kojoj se pojavljuje sekundarni maksimum za



Slika 2.2: Udarni presjek za foton–foton raspršenje uz  $n = 1$  modifikaciju disperzijske relacije. Rezultati su prikazani za EBL foton energije 11 meV kao funkcija energije gama-zrake pri raspršenju uz  $\theta' = \pi$ . (**Gore**) Iscrtkana plava linija predstavlja udarni presjek u slučaju očuvane Lorentzove simetrije, pune linije predstavljaju superluminalni slučaj za različite vrijednosti  $E_{QG,1}$ . (**Dolje**) Iscrtkana plava linija predstavlja Lorentz invarijantni slučaj, pune linije predstavljaju subluminalni slučaj za različite vrijednosti  $E_{QG,1}$ .



Slika 2.3: Udarni presjek za foton–foton raspršenje uz  $n = 2$  modifikaciju disperzijske relacije. Rezultati su prikazani za EBL foton energije 11 meV kao funkcija energije gama-zrake pri raspršenju uz  $\theta' = \pi$ . (**Gore**) Iscrtkana plava linija predstavlja udarni presjek u slučaju očuvane Lorentzove simetrije, pune linije predstavljaju superluminalni slučaj za različite vrijednosti  $E_{QG,2}$ . (**Dolje**) Iscrtkana plava linija predstavlja Lorentz invarijantni slučaj, pune linije predstavljaju subluminalni slučaj za različite vrijednosti  $E_{QG,2}$ .

subliminalni slučaj. Dobiveni rezultati za pozicije maksimuma prikazani su u Tablici 2.1, pozicije prvog praga reakcije u Tablici 2.2, a pozicije drugog praga reakcije u Tablici 2.3.

Tablica 2.1: Pozicije maksimuma za različite vrijednosti  $E_{QG}$  uz uzimanje prvog ili drugog člana reda modificirane disperzijske relacije za superluminalni  $S = 1$  i subluminalni  $S = -1$  slučaj. Energije su izražene u TeV. LI predstavlja udarni presjek u slučaju očuvane Lorentzove simetrije.

Maksimumi/ $E$ [TeV]	$E_{QG}=1E_{PL}$	$E_{QG}=10E_{PL}$	$E_{QG}=20E_{PL}$	$E_{QG}=50E_{PL}$	$E_{QG}=100E_{PL}$	LI
$S = 1, n = 1$	23.25	37.17	40.50	43.63	45.03	46.70
$S = 1, n = 2$	31.58	46.03	46.56	46.70	46.70	
$S = -1, n = 1$	×	42.30	59.82	51.96, 131.55	48.89, 203.34	
$S = -1, n = 2$	×	47.50, 167.84	46.90, 279.40	46.76, 530.48	46.70, 852.22	

Tablica 2.2: Pozicije prvog praga reakcije za različite vrijednosti  $E_{QG}$  uz uzimanje prvog ili drugog člana reda modificirane disperzijske relacije za superluminalni  $S = 1$  i subluminalni  $S = -1$  slučaj.

Prvi prag/ $E$ [TeV]	$E_{QG}=1E_{PL}$	$E_{QG}=10E_{PL}$	$E_{QG}=20E_{PL}$	$E_{QG}=50E_{PL}$	$E_{QG}=100E_{PL}$	LI
$S = 1, n = 1$	16.06	21.85	22.65	23.32	23.52	23.79
$S = 1, n = 2$	20.86	23.72	23.79	23.79	23.79	
$S = -1, n = 1$	×	27.72	25.25	24.32	24.05	
$S = -1, n = 2$	×	23.79	23.79	23.79	23.79	

Tablica 2.3: Pozicije drugog praga reakcije za različite vrijednosti  $E_{QG}$  uz uzimanje prvog ili drugog člana reda modificirane disperzijske relacije za superluminalni  $S = 1$  i subluminalni  $S = -1$  slučaj.

Drugi prag/ $E$ [TeV]	$E_{QG}=1E_{PL}$	$E_{QG}=10E_{PL}$	$E_{QG}=20E_{PL}$	$E_{QG}=50E_{PL}$	$E_{QG}=100E_{PL}$	LI
$S = 1, n = 1$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$S = 1, n = 2$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	
$S = -1, n = 1$	×	55.35	88.66	150.33	218.73	
$S = -1, n = 2$	×	178.37	288.59	538.87	860.29	

Udarni presjek u slučaju očuvane Lorentzove simetrije, reprezentiran plavom iscrtkanom linijom na slikama 2.2 i 2.3, ubrzano raste nakon prvog praga reakcije. Pomoću omjera rezultata za LI slučaj u tablicama 2.1 i 2.2, možemo vidjeti da udarni presjek na 1.96 puta većoj energiji od prvog praga

reakcije dostiže maksimalnu vrijednost koja iznosi  $1.67 \times 10^{-25} \text{cm}^2$ . Nakon maksimuma udarni presjek se asimptotski približava prema nuli.

Udarni presjek superluminalnog slučaja  $S = 1$  poprilično nalikuje na standardni slučaj očuvane Lorentzove simetrije uz smanjeni prvi prag reakcije i brže asimptotsko približavanje prema nuli nakon maksimuma. Devijacija od standardnog udarnog presjeka je izraženija za  $n = 1$  slučaj, kao i za niže vrijednosti  $E_{QG}$  što se može jasno vidjeti usporedbom slika 2.2 i 2.3. S porastom  $E_{QG}$  prag reakcije teži prema pragu reakcije standardnog udarnog presjeka.

Udarni presjek subluminalnog slučaja  $S = -1$ , koji je prema [29] teorijski i eksperimentalno najzanimljiviji slučaj budući da postoji mogućnost mjerenja efekta u tom slučaju, značajno odstupa od dva prethodno spomenuta udarna presjeka. Uz činjenicu da u ovom slučaju postoji drugi prag reakcije iznad kojeg odvijanje reakcije nije moguće, zanimljiva je i pojava sekundarnog maksimuma na višim energijama  $E_{QG}$ . Na najnižim energijama  $E_{QG}$  je moguće da se prag reakcije nikada ne dostigne pa je u tom slučaju udarni presjek jednak nuli za sve energije gama-zrake, kao što se vidi na slikama 2.2 i 2.3 za  $E_{QG}=1 E_{PL}$ . Za srednje vrijednosti  $E_{QG} \approx 1 E_{PL}$  u  $n = 1$  slučaju, udarni presjek ne dostiže maksimalnu vrijednost LI slučaja, već je za 40% manji. U slučaju najviših energija  $E_{QG}$  uočavamo dva lokalna maksimuma. Udarni presjek postiže maksimalnu vrijednost od  $1.67 \times 10^{-25} \text{cm}^2$  u području primarnog maksimuma gdje oblikom prati standardni slučaj. Porastom energije gama-zrake pojavljuje se lokalni minimum nakon kojeg udarni presjek ponovno poprima maksimalnu vrijednost u sekundarnom maksimumu, neposredno prije drugog praga reakcije. Vrijednost  $E_{QG}$  na kojoj se formira sekundarni maksimum u subluminalnom slučaju  $n = 1$  za EBL foton energije 11 meV pri raspršenju uz  $\theta' = \pi$  je izračunata pomoću *Python* koda i iznosi  $E_{QG} = 27.5 E_{PL}$ , dok se za  $n = 2$  sekundarni maksimum pojavljuje na  $E_{QG} = 3.8 E_{PL}$ . U subluminalnom slučaju  $n = 2$ , za jednake vrijednosti  $E_{QG}$  primarni maksimumi puno bolje prate standardni slučaj, a sekundarni maksimumi su znatno uži kao što se vidi na Slici 2.3. Porastom  $E_{QG}$ , sekundarni vrh teži prema Diracovoj delta funkciji, prvi prag reakcije teži prema pragu reakcije standardnog udarnog presjeka. a drugi prag reakcije prema beskonačnosti što je očekivano



s obzirom da za  $E_{QG} \rightarrow \infty$  modificirani udarni presjeci moraju odgovarati standardnome.

Pristup modifikacije udarnih presjeka pomoću modificiranog praga reakcije temelji se na izrazu za udarni presjek (2.2.25) i modificiranoj disperzijskoj relaciji (1.1.1). Prilikom izvoda (2.2.25), koristile su se razne pretpostavke koje vrijede isključivo u sustavu centra mase, poput onih koje su prethodile izrazu (2.1.28). Spomenute pretpostavke su opravdane zakonom očuvanja energije pri narušenoj Lorentzovoj simetriji u inercijalnim sustavima, pri čemu kvadrat ukupne energije u sustavu centra mase  $s$  (2.3.1) ima isti iznos i u laboratorijskom sustavu kao i u sustavu centra mase.

U sustavu centra mase prag reakcije, a samim time i modificirani udarni presjek, se razlikuje od onog u laboratorijskom sustavu budući da član modifikacije disperzijske relacije ovisi o energiji fotona koja se mijenja prilikom prelaska iz jednog referentnog sustava u drugi. Naime, za slučaj koji se promatra u ovom radu gdje se modificira disperzijska relacija samo za jedan foton, u sustavu centra mase  $n = 2$  član modifikacije će glasiti  $S(\frac{1}{2}k^0/E_{QG,2})^2(k^0)^2 + S(\frac{1}{2}k^0/E_{QG,2})^2(k^0)^2$  što se iznosom razlikuje od  $S(k^0/E_{QG,2})^2(k^0)^2$  u laboratorijskom sustavu. Prema [16], transformacije između referentnih sustava u općenitim teorijama narušenja Lorentzove simetrije nisu izravne kao u standardnom slučaju. Sve navedeno upućuje na oprez prilikom tretiranja udarnih presjeka u različitim referentnim sustavima. Uz kinematički pristup modificiranja udarnog presjeka uz promjenu praga reakcije, postoji i pristup modificiranja dinamike gdje se udarni presjek računa u teoriji modificirane kvantne elektrodinamike. Za potpuno razumijevanje narušenja Lorentzove simetrije potrebno je uzeti u obzir oba pristupa. Uobičajeno se smatra se da kinematičke modifikacije mnogo više doprinose promjeni udarnog presjeka od dinamičkih, no takvu tvrdnju je potrebno dodatno provjeriti kako s eksperimentalne tako i s teorijske strane.

## Poglavlje 3

# Foton–foton raspršenje u teoriji s operatorima narušenja Lorentzove simetrije

Foton–foton raspršenje se može analizirati u okviru modificirane kvantne elektrodinamike pomoću operatora narušenja Lorentzove simetrije do dimenzije 6 fokusirajući se na dinamičke posljedice takve teorije. Razlika između dinamičkih modifikacija procesa u teoriji Lorentzovog narušenja u odnosu na kinematičke počiva u procesima koji nisu uobičajeno dopušteni u slučaju očuvane Lorentzove simetrije poput raspada fotona u vakuumu na dva ili više fotona. Iako se u ovom radu isključivo diskutira foton–foton raspršenje, danim tehnikama je moguće analizirati i druge procese s modificiranom dinamikom. Radi argumenata danih u prethodnom poglavlju, udarni presjek računamo isključivo u laboratorijskom sustavu. Tijekom ovog poglavlja prati se rad [27], gdje je izračunat udarni presjek za foton–foton raspršenje u limesu visokih energija. Nakon toga koristeći parametrizaciju kinematike dane u [27], računamo udarni presjek u standardnoj kvantnoj elektrodinamici. Pomoću aproksimacija i tehnika u računu za standardni udarni presjek, odbacuje se ultrarelativistička aproksimacija čime se rezultat iz [27] preciznije računa u području prvog praga reakcije i maksimuma.

### 3.1 Kvantna elektrodinamika s operatorima narušenja Lorentzove simetrije

Narušenje Lorentzove simetrije se može promatrati pomoću proširenja teorije kvantne elektrodinamike gdje se uvode operatori Lorentzovog narušenja. Lorentzovo narušenje tada mijenja karakter procesa pomoću (i) modifikacije integrala u faznom prostoru, (ii) različitih valnih funkcija za početna i konačna stanja sustava i (iii) promjena u verteksima interakcije i propagatorima teorije. Efekti (ii) i (iii) vode prema modifikaciji matrice raspršenja u odnosu na slučaj očuvanja Lorentzove simetrije i nužno ih je uzeti sve u obzir prema [15, 7].

Razmatramo proširenje kvantne elektrodinamike s operatorima Lorentzovog narušenja do dimenzije 6 uz pretpostavku očuvane baždarne invarijantnosti. Operatori viših dimenzija od 6 nisu uzeti u obzir prilikom izgradnje teorije budući da su izvan eksperimentalne domene u doglednoj budućnosti (vidi [26]). U okviru teorije se razmatraju i fermionske modifikacije za razliku od prethodnog poglavlja. Na proširenu teoriju kvantne elektrodinamike s operatorima Lorentzovog narušenja se postavljaju ograničenja kako bi se pojednostavila analiza problema. Prvi uvjet je invarijantnost teorije s obzirom na rotacije u trodimenzionalnom prostoru. Drugi uvjet podrazumijeva CPT i P invarijantnost teorije. CPT simetrija je fizikalno nužna iz razloga što zabranjuje operatore Lorentzovog narušenja dimenzije 3 koji uzrokuju neprihvatljive vrijednosti Lorentzovog narušenja u limesu niskih energija (vidi [24]). Zahtjev prostornog pariteta je tehničke naravi i služi za pojednostavljenje teorije, moguće ga je odbaciti prilikom općenitijeg razmatranja. Treće ograničenje jest uzimanje samo onih operatora u Lagranžijanu koji se ne mogu odbaciti redefinicijom polja ili koordinata. Prema općoj logici efektivne teorije polja, višedimenzionalni operatori Lagranžijana su ekvivalentni ako produciraju jednake jednadžbe gibanja kao i Lagranžijan s operatorima nižih dimenzija. Četvrtim uvjetom se zahtijevaju samo oni operatori za koje takva tvrdnja ne vrijedi. Dodatan uvjet počiva na činjenici da se iznad elektroslabe skale od  $\approx 250$  GeV, model treba ugraditi u puni Standardni Model. Kiralna struktura Standardnog Modela zabranjuje operatore Lorentzovog

narušenja dimenzije 5 s očuvanom CPT simetrijom (vidi [12]) pa petim uvjetom zabranjujemo operatore takve dimenzije. Konačno, šestim uvjetom uključujemo samo one operatore koji sadrže kvadratne članove u polju čime doprinose Lagranžijanu slobodne čestice. Zadnjim uvjetom se uspostavlja minimalan teorijski okvir u kojem Lorentzovo narušenje utječe na kinematiku i dinamiku teorije. Kao posljedica danih uvjeta, prema [27] slijedi Lagranžijan

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\kappa\bar{\psi}\gamma^i D_i\psi + \frac{ig}{M^2}D_j\bar{\psi}\gamma^i D_i D_j\psi + \frac{\xi}{4M^2}F_{kj}\partial_i^2 F^{kj}, \quad (3.1.1)$$

gdje je

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

standardna kovarijantna derivacija,  $F_{\mu\nu}$  elektromagnetski tenzor polja, a  $M$  je skala energije na kojoj se očituju efekti Lorentzovog narušenja. Latinski indeksi  $i, j, \dots$  odnose se na prostorne komponente. Zadnja tri člana Lagranžijana opisuju narušenje Lorentzove simetrije, gdje prvi od njih je dimenzije 4, a zadnja dva su dimenzije 6. Bezdimenzionalni realni parametri  $\kappa, g$  i  $\xi$  koji predstavljaju jakost Lorentzovog narušenja, mogu se prilikom refedinicije ugraditi u skalu  $M$  i time povezati s  $E_{QG}$  prošlog poglavlja, no za sada će se držati odvojenima radi preglednosti. Prema efektivnoj teoriji, operatori nižih dimenzija bi se trebali tretirati kao dominantni članovi teorije za razliku od viših. Međutim, kako je koeficijent  $\kappa$  eksperimentalno ograničen na jako male vrijednosti od  $|\kappa| < 10^{-15}$  ([24]), slijedi da su efekti operatora dimenzije 6 nezanemarivi, a možda čak i dominantni.

Promotrimo slobodna stanja čestica za teoriju (3.1.1). Prema [26] operatori narušenja Lorentzove simetrije u (3.1.1) modificiraju disperzijsku relaciju za fotone i elektrone kao

$$\begin{aligned} E_\gamma^2 &= (k^0)^2 + \frac{\xi(k^0)^4}{M^2} \\ E_e^2 &= m^2 + p^2 \left( 1 + \kappa + \frac{gp^2}{M^2} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

### 34 3. Foton–foton raspršenje u teoriji s operatorima narušenja Lorentzove simetrije

---

gdje je  $k^0$  energija fotona. Primijetimo iz (3.1.2) da je parametarom  $\xi$  opisana modifikacija disperzijske relacije fotona, a parametrima  $\kappa$  i  $g$  za fermionsku. Uočavamo da je modifikacija disperzijske relacije za foton ekvivalentna izrazu (1.1.1) za  $n = 2$  slučaj ako postavimo  $E_{QG,2} = M/\sqrt{|\xi|}$ , a predznakom parametra  $\xi$  razlikujemo superluminalni od subluminalnog slučaja. U kasnijem dijelu rada koristimo tu činjenicu kako bi povezali dva pristupa. Posljedica konstrukcije Lagranžijana (3.1.1) jest efektivna eliminacija  $n = 1$  i  $n \geq 3$  slučajeva opće relacije (1.1.1). Valja još napomenuti da iz (3.1.2) slijedi da za velike energije čestica disperzijska relacija je proporcionalna četvrtoj potenciji impulsa čestice. Za računanje amplitude vjerojatnosti teorije (3.1.1), potrebno je odrediti izraze za sumu preko polarizacija čestica, oblik valnih funkcija čestica kao i izraze za propagatore i vertekse interakcije teorije.

Neka je  $k^i$  3-impuls fotona  $k$  orijentiranog u smjeru z-osi u nekom referentnom sustavu, tada polarizacijski vektori glase

$$\varepsilon_{\mu}^{(1)} = (0, 1, 0, 0), \quad \varepsilon_{\mu}^{(2)} = (0, 0, 1, 0),$$

što daje standardni izraz za sumu preko polarizacijskih vektora

$$\sum_{a=1,2} \varepsilon_{\mu}^{(a)} \varepsilon_{\nu}^{(b)} = \text{diag}(0, 1, 1, 0).$$

Ipak, gornji izraz za sumu preko polarizacijskih vektora nema poželjno svojstvo invarijantnosti s obzirom na trodimenzionalne rotacije. Do rotacijske invarijantnosti sume dolazimo koristeći svojstvo baždarne invarijantnosti čime se osigurava vezanje fotona na očuvanu struju. Time su Wardovi identiteti očuvani pa gornjoj sumi možemo dodati član oblika  $n_{\mu}k_{\nu} + n_{\nu}k_{\mu}$ , gdje je  $n_{\mu}$  proizvoljan vektor, pri čemu kvadrat amplitude vjerojatnosti ostaje nepromijenjen. Prikladnim

izborom vektora  $n_\mu$  slijedi

$$\sum_{a=1,2} \varepsilon_\mu^{(a)} \varepsilon_\nu^{(b)} = \text{dijag}(-E_\gamma^2/(k^0)^2, 1, 1, 1), \quad (3.1.3)$$

što se u slučaju standardne disperzijske relacije  $E_\gamma = k^0$  svodi na uobičajeni izraz

$$\sum_{a=1,2} \varepsilon_\mu^{(a)} \varepsilon_\nu^{(b)} = -g_{\mu\nu}.$$

Odredimo sljedeće sumu po polarizacijama spinora. Uz dekompoziciju polja spinora na komponente pozitivne i negativne frekvencije

$$\psi(x, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}} \left( e^{-iEt+ipx} u^s(p) a_s(p) + e^{iEt-ipx} v^s(p) b_s^\dagger(p) \right), \quad (3.1.4)$$

slijede rješenja modificirane Diracove jednadžbe

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - (\sigma^i p^i) \left(1 + \kappa + \frac{gp^2}{M^2}\right)} \chi^s \\ \sqrt{E + (\sigma^i p^i) \left(1 + \kappa + \frac{gp^2}{M^2}\right)} \chi^s \end{pmatrix}, \quad v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - (\sigma^i p^i) \left(1 + \kappa + \frac{gp^2}{M^2}\right)} \zeta^s \\ -\sqrt{E + (\sigma^i p^i) \left(1 + \kappa + \frac{gp^2}{M^2}\right)} \zeta^s \end{pmatrix},$$

gdje su  $\sigma^i$  Paulijeve matrice i  $\chi^s$  i  $\zeta^s$ ,  $s=1,2$  su dvokomponentne baze spinora. Uzemo li baze kao ortonormirane, slijede uobičajeni uvjeti normalizacije

$$(u^r(p))^\dagger u^s(p) = (v^r(p))^\dagger v^s(p) = 2E\delta^{rs}, \quad (u^r(p))^\dagger v^s(-p) = 0,$$

što vodi prema sumi po spinovima

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^s(p) \bar{u}^s(p) &= \gamma^0 E - \gamma^i p^i \left(1 + \kappa + \frac{gp^2}{M^2}\right) + m \\ \sum_{s=1,2} v^s(p) \bar{u}^s(p) &= \gamma^0 E - \gamma^i p^i \left(1 + \kappa + \frac{gp^2}{M^2}\right) - m. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

### 36 3. Foton–foton raspršenje u teoriji s operatorima narušenja Lorentzove simetrije

Detaljniji izvod jednadžbi (3.1.3) i (3.1.5) može se pronaći u [5]. Koristeći notaciju

$$\tilde{p}^0 = E, \quad \tilde{p}^i = p^i \left( 1 + \kappa + \frac{gp^2}{M^2} \right) \quad (3.1.6)$$

jednadžba (3.1.5) poprima jednostavniji oblik

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^s(p) \bar{u}^s(p) &= \gamma^\mu \tilde{p}_\mu + m \\ \sum_{s=1,2} v^s(p) \bar{u}^s(p) &= \gamma^\mu \tilde{p}_\mu - m. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Fermionski propagator teorije (3.1.1) je dan standardnim izrazom uz zamjenu  $p^\mu \rightarrow \tilde{p}^\mu$  i glasi

$$\text{---}\xrightarrow{p}\text{---} = \frac{i(\gamma^\mu \tilde{p}_\mu + m)}{\tilde{p}_\mu \tilde{p}^\mu - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.1.8)$$

Četvrti i peti članovi Lagranžijana modificiraju verteks interakcije fotona i dva fermiona na način

$$\mathcal{V}_{1\gamma}^\mu = -ie\gamma^\mu - ie\delta_i^\mu \left[ \kappa\gamma^i + \frac{g}{M^2} (p_1^i(p_1 \cdot \gamma) + p_2^i(p_1 \cdot \gamma) - (p_1 \cdot p_2)\gamma^i) \right], \quad (3.1.9)$$

gdje  $p_1$  i  $p_2$  označuju impulse elektrona odnosno pozitrona koji izlaze iz verteksa, a  $(p_1 \cdot \gamma)$  predstavlja skalarni umnožak trodimenzionalnih vektora. Za  $\kappa, g \rightarrow 0$  ili  $M \rightarrow \infty$ , (3.1.9) teži prema izrazu za verteks u Lorentz invarijantnom slučaju. Osim standardnog verteksa interakcije prisutnog u kvantnoj elektrodinamici, peti član Lagranžijana (3.1.1) uvodi dva dodatna verteksa koji uključuju dva i tri fotona

$$\mathcal{V}_{2\gamma}^{\mu\nu} = \frac{ige^2}{M^2} \left[ \gamma^i (p_2 - p_1)^j + \gamma^j (p_2 - p_1)^i + \delta^{ij} ((p_2 - p_1) \cdot \gamma) \right] \delta_i^\mu \delta_j^\nu \quad (3.1.10)$$

$$\mathcal{V}_{3\gamma}^{\mu\nu\lambda} = -\frac{2ige^3}{M^2} \left[ \delta_i^\mu \delta_j^\nu \delta_j^\lambda + \delta_i^\nu \delta_j^\mu \delta_j^\lambda + \delta_i^\lambda \delta_j^\mu \delta_j^\nu \right] \gamma^i, \quad (3.1.11)$$

gdje impulsi  $p_1$  i  $p_2$  izlaze iz verteksa. Broj koji stoji uz  $\gamma$  na mjestu indeksa  $\mathcal{V}$ , predstavlja

broj fotona u interakcijskom verteksu. Za Lorentz invarijantan slučaj  $g \rightarrow 0$ ,  $M \rightarrow \infty$ , (3.1.10) i (3.1.11) teže u nulu, kao što je i očekivano. Time su dana sva potrebna pravila za računanje udarnih presjeka teorije (3.1.1).

## 3.2 Modificirani udarni presjek u limesu visokih energija

Nakon općeg razmatranja teorije, u mogućnosti smo izračunati modificirani udarni presjek foton–foton raspršenja. Promatrat ćemo opći oblik teorije, pri čemu se modificiraju fermioni i fotoni. Radi argumenata spomenutih u trećem poglavlju, analizirat ćemo čitav problem u laboratorijskom sustavu. Za početak ćemo izvesti udarni presjek u limesu visokih energija gama-zrake, tj. za one energije puno veće od prvog praga reakcije. Krećemo od izraza za Fermijevo zlatno pravilo (2.1.18) koji je izveden bez ikakvih prepostavki o referentnom sustavu

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |M|^2 \frac{1}{4I} \prod_a \frac{d^3 \mathbf{p}'_a}{(2\pi)^3 2\epsilon'_a}.$$

Neka su  $k = (k^0, \mathbf{k})$  i  $q = (q^0, \mathbf{q})$  četvero-impulsi gama i EBL fotona, a  $p_1 = (p_1^0, \mathbf{p}_1)$  i  $p_2 = (p_2^0, \mathbf{p}_2)$  četvero-impulsi elektrona i pozitrona nakon raspršenja. Razmatramo sljedeću kinematičku konfiguraciju u laboratorijskom sustavu gdje je impuls gama-zrake  $k$  usmjeren duž x-osi

$$k^i = (k, 0, 0), \quad q^i = (q_x, q_y, 0) \quad (3.2.1)$$

$$p_1^i = \left( \frac{k + q_x}{2}(1 + x), \frac{q_y}{2}(1 + x) + p_y, p_z \right), \quad p_2^i = \left( \frac{k + q_x}{2}(1 - x), \frac{q_y}{2}(1 - x) - p_y, -p_z \right), \quad (3.2.2)$$

gdje je  $x \in [-1, 1]$  parametar kojim opisujemo udio prijenosa ukupnog impulsa u pojedini fermion, a  $p_y, p_z$  dodatni impulsi uvedeni na način da se zadovoljava zakon očuvanja impulsa. Ograničenje na  $x$  proizlazi iz zakona očuvanja impulsa; za  $x = 0$  oba fermiona posjeduju jednak iznos impulsa, dok u graničnim slučajevima  $x \rightarrow \pm 1$  jedan od fermiona preuzima potpun iznos ukupnog impulsa.



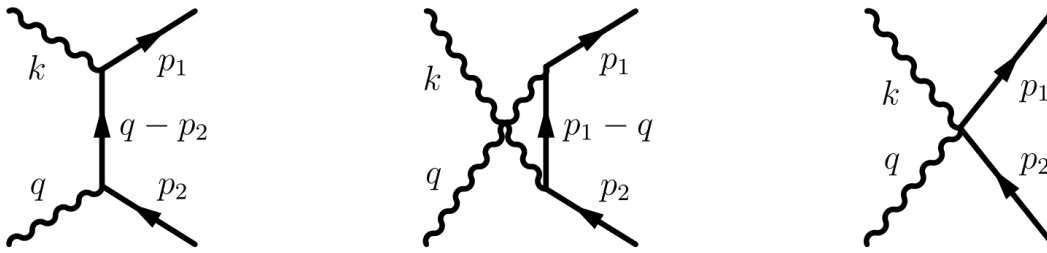
### 38 3. Foton–foton raspršenje u teoriji s operatorima narušenja Lorentzove simetrije

Konfiguracija (3.2.1), (3.2.2) je opća parametrizacija uz očuvanje impulsa do na trodimenzionalnu rotaciju. Budući da je dispezijska relacija modificirana samo za gama-zraku  $k$ , za EBL foton  $q$  možemo pisati

$$q^0 = \omega, \quad q_x = \omega \cos \theta', \quad q_y = \omega \sin \theta', \quad (3.2.3)$$

gdje je  $\theta'$  kut između dva fotona.

Feynmanovi dijagrami koji doprinose reakciji prikazani su na Slici 3.1.



Slika 3.1: Feynmanovi dijagrami za foton–foton raspršenje za modificiranu teoriju u najnižem redu. Slika preuzeta iz [27]

Za razliku od dijagrama  $s$  i  $t$ -kanala koji su prisutni u standardnoj kvantnoj elektrodinamici prikazanih na Slici 2.1, modificirana teorija (3.1.1) uvodi i treći dijagram pomoću verteksa s dva fotona (3.1.11). Koristeći standardna Feynmanova pravila uz modificirane izraze za fermionski propagator (3.1.8) i vertekse interakcije (3.1.9) i (3.1.10), iz dijagrama Slike 3.1 slijede odgovarajuće amplitude vjerojatnosti  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  i  $\mathcal{M}_3$

$$\mathcal{M}_1 = \bar{u}(p_1) \mathcal{V}_{1\gamma}^\mu(p_1, p_2 - q) \frac{i(\gamma^\lambda(\tilde{q} - \tilde{p}_2)_\lambda + m)}{(\tilde{q} - \tilde{p}_2)_\rho(\tilde{q} - \tilde{p}_2)^\rho - m^2} \mathcal{V}_{1\gamma}^\nu(q - p_2, p_2) v(p_2) \varepsilon_\mu(k) \varepsilon_\nu(q) \quad (3.2.4)$$

$$\mathcal{M}_2 = \bar{u}(p_1) \mathcal{V}_{1\gamma}^\mu(p_1, q - p_1) \frac{i(\gamma^\lambda(\tilde{p}_1 - \tilde{q})_\lambda + m)}{(\tilde{p}_1 - \tilde{q})_\rho(\tilde{p}_1 - \tilde{q})^\rho - m^2} \mathcal{V}_{1\gamma}^\nu(p_1 - q, p_2) v(p_2) \varepsilon_\mu(q) \varepsilon_\nu(k) \quad (3.2.5)$$

$$\mathcal{M}_3 = \bar{u}(p_1) \mathcal{V}_{2\gamma}^{\mu\nu}(p_1, p_2) v(p_2) \varepsilon_\mu(k) \varepsilon_\nu(q), \quad (3.2.6)$$

gdje su četvero-impulsi s tidlom definirani u (3.1.6). Kvadrat amplitude vjerojatnosti računamo u limesu visokih energija gama-zrake  $k^0 = k$  i fermiona  $p_1^0$  i  $p_2^0$ , puno većih od prvog praga reakcije.

Iz tog razloga zanemarujemo masu femiona u odnosu na energiju gama-zrake ili fermiona. Radi velike razlike energija fotona, prilikom ekspanzije članova zadržavamo samo vodeći član omjera  $\omega/k$ , tj. zanemarujemo članove reda  $\omega^n/k^n$ ,  $n \geq 2$ . Energije fotona i elektrona možemo zapisati kao

$$E_k = k^0 \sqrt{1 + \frac{\xi(k^0)^2}{M^2}} \approx k^0 + \frac{\xi(k^0)^3}{2M^2} \quad (3.2.7)$$

$$E_q = \omega \quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned} E_{p_{1,2}} = p_{1,2}^0 &= \sqrt{m^2 + p_{1,2}^2 \left(1 + \kappa + \frac{gp_{1,2}^2}{M^2}\right)^2} \approx \sqrt{m^2 + p_{1,2}^2(1 + 2\kappa) + \frac{2gp_{1,2}^4}{M^2}} \\ &\approx |p_{1,2}| \sqrt{(q + 2\kappa) + \frac{2g|p_{1,2}|^3}{M^2}} \approx |p_{1,2}|(1 + \kappa) + \frac{g|p_{1,2}|^3}{M^2}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Vodeći član energija fermiona (3.2.9) u limesu visokih energija uz kinematiku (3.2.2) glasi

$$\begin{aligned} E_{p_1} = p_1^0 &= \sqrt{m^2 + p_1^2} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{k + q_x}{2}(1 + x)\right)^2 + \left(\frac{q_y}{2}(1 + x) + p_y\right)^2 + p_z^2} \\ &= \frac{k + q_x}{2}(1 + x) \sqrt{1 + \frac{4m^2}{(k + q_x)^2(1 + x)^2} + 4\frac{\left(\frac{q_y}{2}(1 + x) + p_y\right)^2}{(k + q_x)^2(1 + x)^2} + 4\frac{p_z^2}{(k + q_x)^2(1 + x)^2}} \\ &= \frac{k + q_x}{2}(1 + x) + \frac{m^2}{(k + q_x)(1 + x)} + \frac{\left(\frac{q_y}{2}(1 + x) + p_y\right)^2}{(k + q_x)(1 + x)} + \frac{p_z^2}{(k + q_x)(1 + x)} \\ &\approx \frac{k}{2}(1 + x) + \frac{m^2 + p_\perp^2}{k(1 + x)} \approx \frac{k}{2}(1 + x), \\ E_{p_2} = p_2^0 &\approx \frac{k}{2}(1 - x) + \frac{m^2 + p_\perp^2}{k(1 - x)} \approx \frac{k}{2}(1 - x), \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

gdje je  $p_\perp^2 = p_y^2 + p_z^2$ . Okomita komponenta impulsa  $p_\perp^2$  je reda veličine  $k\omega$  što će se kasnije pokazati.

Nazivnike razlomaka (3.2.4) i (3.2.5) možemo pojednostaviti aproksimacijom

$$\tilde{p}_\lambda \tilde{p}^\lambda = \tilde{p}_0 \tilde{p}^0 - \sum_i \tilde{p}^i \tilde{p}_i = E^2 - \left(1 + 2\kappa + \frac{2gp^2}{M^2}\right) \mathbf{p}^2 \approx E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

### 40 3. Foton–foton raspršenje u teoriji s operatorima narušenja Lorentzove simetrije

koja vrijedi radi limesa visokih energija pri kojima su korekcije Lorentzovog narušenja zanemarive. Koristeći gornju aproksimaciju, uzimajući (3.2.10), dolazimo do zaključka da su nazivnici reda veličine  $k\omega$

$$\begin{aligned}
 (\tilde{q} - \tilde{p}_2)_\lambda (\tilde{q} - \tilde{p}_2)^\lambda - m^2 &\approx -2\tilde{q}\tilde{p}_2 + \tilde{p}_2^2 - m^2 = -2\tilde{q}\tilde{p}_2 = -2(q^0 p_2^0 - \mathbf{q}\mathbf{p}_2) \\
 &= -2 \left( q^0 p_2^0 - \frac{q_x(k + q_x)}{2}(1 - x) - \frac{q_y^2}{2}(1 - x) - q_y p_y \right) \\
 &\approx -2 \left( \omega \frac{k}{2}(1 - x) + \frac{q_x k}{2}(1 - x) \right) = -k(\omega - q_x)(1 - x)
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

$$(\tilde{p}_1 - \tilde{q})_\lambda (\tilde{p}_1 - \tilde{q})^\lambda - m^2 \approx -k(\omega - q_x)(1 + x).$$

Uz dimenzionalnu argumentaciju pojednostavljenja nazivnika razlomka, prigodno je reducirati nazivnik na jednostavniji oblik radi praktičnosti budući da bilo koji dodatni sumand onemogućuje jednostavan oblik kvadrata amplitude vjerojatnosti i time značajno otežava računanje. Kvadrat amplitude vjerojatnosti računamo do na prvi red razvoja brojnika razlomka u amplitudama vjerojatnosti (3.2.4)–(3.2.6), pri čemu zanemarujemo  $\langle |\mathcal{M}_3|^2 \rangle$  iz razloga što je  $\mathcal{M}_3$  već u prvom redu potisnut parametrima Lorentzovog narušenja. Kod miješanih članova  $\langle \mathcal{M}_3 \mathcal{M}_1^* \rangle$ ,  $\langle \mathcal{M}_3 \mathcal{M}_2^* \rangle$  iz istog razloga uzimamo samo Lorentz invarijantan dio amplituda vjerojatnosti. Uzmemo li sve u obzir, slijedi usrednjeni kvadrat amplitude vjerojatnosti

$$\langle |M|^2 \rangle = 64\pi^2 e^4 \left[ \frac{1 + x^2}{1 - x^2} - 8 \frac{p_\perp^2}{k(\omega - q_x)(1 - x^2)^2} + 16 \frac{p_\perp^4}{k^2(\omega - q_x)^2(1 - x^2)^3} - 4 \frac{\omega_{LV}(x)p_\perp^2}{k(\omega - q_x)^2(1 - x^2)} \right], \tag{3.2.12}$$

gdje je

$$\omega_{LV}(x) = -\kappa x + \frac{\xi k^3}{2M^2} - \frac{gk^3}{4M^2}(1 + 3x^2). \tag{3.2.13}$$

Prilikom računanja (3.2.12) zanemarena je masa elektrona što je opravdano za energije mnogo veće od praga reakcije.

Integracijom Fermijevog zlatnog pravila (2.1.18) slijedi izraz za udarni presjek za foton–foton

raspršenje

$$\sigma = \int (2\pi)^4 \delta(k^0 + q^0 - p_1^0 - p_2^0) \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \langle |M|^2 \rangle \frac{1}{4I} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0}, \quad (3.2.14)$$

gdje je prema (2.1.17)

$$I = kq = k^0 q^0 - \mathbf{k}\mathbf{q} = k\omega(1 - \cos \theta'), \quad (3.2.15)$$

gdje je  $\theta'$  kut između impulsa fotona. Slijedi

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2 k\omega(1 - \cos \theta')} \int \delta(k^0 + q^0 - p_1^0 - p_2^0) \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \langle |M|^2 \rangle \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p_2}{p_2^0}. \quad (3.2.16)$$

Nakon integracije po  $d^3 p_2$  elimineramo  $\delta^{(3)}$  funkciju pa imamo

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2 k\omega(1 - \cos \theta')} \int \delta(k^0 + q^0 - p_1^0 - p_2^0) \langle |M|^2 \rangle \frac{d^3 p_1}{p_1^0 p_2^0}. \quad (3.2.17)$$

Diferencijal  $d^3 p_1$  u sfernim koordinatama možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} d^3 p_1 &= |\mathbf{p}_1|^2 d|\mathbf{p}_1| d\Omega_{p_1} = |\mathbf{p}_1|^2 \frac{\partial |\mathbf{p}_1|}{\partial p_1^0} dp_1^0 d\Omega_{p_1} = |\mathbf{p}_1|^2 \frac{\partial}{\partial p_1^0} \left( \sqrt{p_1^0 - m^2} \right) dp_1^0 d\Omega_{p_1} \\ &= |\mathbf{p}_1| p_1^0 dp_1^0 d\Omega_{p_1}, \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

gdje je  $d\Omega_{p_1}$  prostorni kut za  $\mathbf{p}_1$ . Kako je  $\Omega_{p_1} = -d(\cos \theta)d\phi$ , gdje je  $\theta$  kut između  $\mathbf{p}_1$  i x-osi, a  $\phi$  azimut, izraz (3.2.17) postaje

$$\sigma = \frac{-1}{64\pi^2 k\omega(1 - \cos \theta')} \int \delta(k^0 + q^0 - p_1^0 - p_2^0) \langle |M|^2 \rangle \frac{|\mathbf{p}_1| dp_1^0 d(\cos \theta) d\phi}{p_2^0}. \quad (3.2.19)$$

Pretpostavimo li neovisnost udarnog presjeka s obzirom na azimutalni kut, nakon integracije po

### 42 3. Foton–foton raspršenje u teoriji s operatorima narušenja Lorentzove simetrije

kutu  $\phi$  imamo

$$\sigma = \frac{-1}{32\pi k\omega(1 - \cos\theta)} \int \delta(k^0 + q^0 - p_1^0 - p_2^0) \langle |M|^2 \rangle \frac{|\mathbf{p}_1| dp_1^0 d(\cos\theta)}{p_2^0}. \quad (3.2.20)$$

Delta funkciju ćemo raspisati pomoću točnijih jednažbi za energiju fermiona u odnosu na prethodni slučaj budući da je preciznost izračunavanja iste veoma bitna u kasnijim fazama računa.

Modul impulsa fermiona

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_{1,2}| &= \sqrt{\left(\frac{k + q_x}{2}(1 \pm x)\right)^2 + \left(\frac{q_y}{2}(1 \pm x) \pm p_y\right)^2 + p_z^2} \\ &\approx \frac{k + q_x}{2}(1 \pm x) + \frac{\left(\frac{q_y}{2}(1 \pm x) \pm p_y\right)^2}{k(1 \pm x)} + \frac{p_z^2}{k(1 \pm x)} \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

ubacujemo u izraz za energiju fermiona (3.2.9) pa uz energije fotona (3.2.7) i (3.2.8) slijedi

$$\delta(k^0 + q^0 - p_1^0 - p_2^0) = \delta\left(\omega - q_x + \omega_{LV}(x) - \frac{2p_\perp^2}{k(1 - x^2)}\right). \quad (3.2.22)$$

Iz (3.2.22) potvrđujemo da je  $p_\perp^2$  reda veličine  $k\omega$ . Za izračunavanje (3.2.20) nužno je izračunati faktor  $|\mathbf{p}_1| dp_1^0 d(\cos\theta)/p_2^0$ . Faktor ćemo početno raspisati bez zanemarivanja mase jer će biti korišten kasnije prilikom općenitije analize udarnog presjeka. Iz izraza (3.2.10) imamo

$$p_2^0 \approx \frac{k}{2}(1 - x) + \frac{m^2 + p_\perp^2}{k(1 - x)}, \quad (3.2.23)$$

a iz (3.2.21) u limesu visokih energija slijedi

$$|\mathbf{p}_1| \approx \frac{k}{2}(1 + x) + \frac{p_\perp^2}{k(1 + x)}. \quad (3.2.24)$$

Omjer  $|\mathbf{p}_1|/p_2^0$  je tada jednak

$$\frac{|\mathbf{p}_1|}{p_2^0} = \frac{\frac{k}{2}(1+x) + \frac{p_\perp^2}{k(1+x)}}{\frac{k}{2}(1-x) + \frac{m^2+p_\perp^2}{k(1-x)}} = \frac{(1-x)[k^2(1+x)^2 + 2p_\perp^2]}{(1+x)[k^2(1-x)^2 + 2(m^2+p_\perp^2)]}. \quad (3.2.25)$$

Raspišemo li diferencijal energije  $dp_1^0$  imamo

$$\begin{aligned} dp_1^0 &= \frac{\partial p_1^0}{\partial x} dx + \frac{\partial p_1^0}{\partial p_\perp^2} dp_\perp^2 \approx \frac{\partial p_1^0}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{2}(1+x) + \frac{m^2+p_\perp^2}{k(1+x)} \right) dx \\ &= \left( \frac{k}{2} - \frac{m^2+p_\perp^2}{k(1+x)^2} \right) dx = \frac{k^2(1+x)^2 - 2(m^2+p_\perp^2)}{2k(1+x)^2} dx, \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

pri čemu se pretpostavila veća ovisnost energije o parametru  $x$  u odnosu na parametar  $p_\perp^2$ . Pretpostavka je razumna s obzirom da vrijednost parametra  $x$  dominantan faktor ukupnog iznosa energije fermiona  $\propto k$ , dok je parametar  $p_\perp^2 \propto k\omega$  nekoliko redova veličine manji. Kako je energija fermiona reda veličine  $k$ , slijedi da je pretpostavka u izrazu (3.2.26) opravdana. Iz geometrije parametrizacije (3.2.2) vidimo da je kosinus kuta  $\theta$  jednak omjeru x-komponente i modula impulsa  $\mathbf{p}_1$  pa imamo

$$\begin{aligned} \cos \theta = \frac{p_1^1}{|\mathbf{p}|} &= \frac{\frac{k(1+x)}{2}}{\frac{k(1+x)}{2} + \frac{p_\perp^2}{k(1+x)}} \implies -d \cos \theta = -\frac{\partial \cos \theta}{\partial x} dx - \frac{\partial \cos \theta}{\partial p_\perp^2} dp_\perp^2 \approx -\frac{\partial \cos \theta}{\partial p_\perp^2} dp_\perp^2 \\ &= \frac{2k^2(1+x)^2}{[k^2(1+x)^2 + 2p_\perp^2]^2} dp_\perp^2, \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

gdje se zanemario član parcijalne integracije po  $x$  budući da je  $p_\perp^2$  dominantniji parametar kuta  $\theta$ . Pretpostavke zanemarivanja članova korištene u (3.2.26) i (3.2.27) bit će dodatno potkrijepljene ispravnim izračunavanjem standardnog udarnog presjeka u laboratorijskom sustavu u kasnijem dijelu rada. Konačno, nakon pojednostavljenja slijedi da je faktor  $|\mathbf{p}_1|dp_1^0d(\cos \theta)/p_2^0$  jednak

$$\frac{|\mathbf{p}_1|dp_1^0d(\cos \theta)}{p_2^0} = k \frac{(1-x)[k^2(1+x)^2 - 2(m^2+p_\perp^2)]}{(1+x)[k^2(1+x)^2 + 2(m^2+p_\perp^2)][k^2(1+x)^2 + 2p_\perp^2]} dx dp_\perp^2. \quad (3.2.28)$$

### 44 3. Foton–foton raspršenje u teoriji s operatorima narušenja Lorentzove simetrije

Dobiveni izraz se znatno pojednostavljuje u limesu visokih energija gama-zrake  $k^2 \gg m^2, p_\perp^2$ , pri čemu slijedi

$$\frac{|\mathbf{p}_1| dp_1^0 d(\cos \theta)}{p_2^0} = \frac{dx dp_\perp^2}{k(1-x^2)}, \quad (3.2.29)$$

pa konačno izraz (3.2.20) postaje

$$\sigma = \frac{1}{32\pi k\omega(1-\cos\theta')} \int dx \frac{dp_\perp^2}{k(1-x^2)} \delta\left(\omega - q_x + \omega_{LV}(x) - \frac{2p_\perp^2}{k(1-x^2)}\right) \langle |M|^2 \rangle. \quad (3.2.30)$$

Uvrstimo li usrednjeni kvadrat amplitude vjerojatnosti dobivamo sljedeći izraz

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{2\pi e^4}{k\omega(1-\cos\theta')} \int dx \frac{dp_\perp^2}{k(1-x^2)} \delta\left(\omega - q_x + \omega_{LV}(x) - \frac{2p_\perp^2}{k(1-x^2)}\right) \times \\ & \left[ \frac{1+x^2}{1-x^2} - \frac{8p_\perp^2}{k(\omega-q_x)(1-x^2)^2} + \frac{16p_\perp^4}{k^2(\omega-q_x)^2(1-x^2)^3} - \frac{4\omega_{LV}(x)p_\perp^2}{k(\omega-q_x)^2(1-x^2)} \right], \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

gdje eliminiramo delta funkciju integracijom po  $dp_\perp^2$ . Međutim treba obratiti pažnju na ispravno baratanje delta funkcijom koja nije zapisana u uobičajenom obliku, budući da se parametar integracije nalazi u brojniku razlomka. Koristimo svojstvo skaliranja delta funkcije

$$\delta(c(x-x_0)) = \frac{1}{|c|} \delta(x-x_0)$$

čime delta funkciju dovodimo u prikladan oblik

$$\begin{aligned} \delta\left(\omega - q_x + \omega_{LV}(x) - \frac{2p_\perp^2}{k(1-x^2)}\right) &= \delta\left(\frac{2}{k(1-x^2)} \left(\frac{k(1-x^2)}{2}(\omega - q_x + \omega_{LV}(x)) - p_\perp^2\right)\right) \\ &= \frac{k(1-x^2)}{2} \delta\left(\frac{k(1-x^2)}{2}(\omega - q_x + \omega_{LV}(x)) - p_\perp^2\right), \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

što koristimo tijekom cijelog rada. Izraz (3.2.31) tada postaje

$$\sigma = \frac{\pi e^4}{k\omega(1 - \cos \theta')} \int dx dp_{\perp}^2 \delta \left( \omega - q_x + \omega_{LV}(x) - \frac{2p_{\perp}^2}{k(1 - x^2)} \right) \times \quad (3.2.33)$$

$$\left[ \frac{1 + x^2}{1 - x^2} - \frac{8p_{\perp}^2}{k(\omega - q_x)(1 - x^2)^2} + \frac{16p_{\perp}^4}{k^2(\omega - q_x)^2(1 - x^2)^3} - \frac{4\omega_{LV}(x)p_{\perp}^2}{k(\omega - q_x)^2(1 - x^2)} \right],$$

iz čega nakon integracije po  $dp_{\perp}^2$  uz (3.2.3) slijedi

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\pi e^4}{k\omega(1 - \cos \theta')} \int dx \left[ \frac{1 + x^2}{1 - x^2} - 4 \frac{\omega(1 - \cos \theta') + \omega_{LV}(x)}{\omega(1 - \cos \theta')(1 - x^2)} + \right. \\ &4 \frac{(\omega(1 - \cos \theta') + \omega_{LV}(x))^2}{\omega(1 - \cos \theta')^2(1 - x^2)} - 2 \frac{\omega_{LV}(x)(\omega(1 - \cos \theta') + \omega_{LV}(x))}{(1 - \cos \theta')^2} \left. \right] \\ &= \frac{\pi e^4}{k\omega(1 - \cos \theta')} \int dx \left\{ \frac{1 + x^2}{1 - x^2} + 2 \frac{\omega(1 - \cos \theta') + \omega_{LV}(x)}{\omega(1 - \cos \theta')} \times \right. \\ &\left. \left[ 2 \frac{\omega(1 - \cos \theta') + \omega_{LV}(x)}{\omega(1 - \cos \theta')(1 - x^2)} - \frac{2}{1 - x^2} - \frac{2\omega_{LV}(x)}{\omega(1 - \cos \theta')} \right] \right\} \quad (3.2.34) \\ &= \frac{\pi e^4}{k\omega(1 - \cos \theta')} \int dx \left\{ \frac{1 + x^2}{1 - x^2} + 2 \frac{\omega(1 - \cos \theta') + \omega_{LV}(x)}{\omega(1 - \cos \theta')} \times \right. \\ &\left. \left[ \frac{2\omega_{LV}(x)}{\omega(1 - \cos \theta')(1 - x^2)} - \frac{\omega_{LV}(x)}{\omega(1 - \cos \theta')} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Pojednostavljenjem uglate zagrade imamo

$$\sigma = \frac{\pi e^4}{k\omega(1 - \cos \theta')} \int dx \left\{ \frac{1 + x^2}{1 - x^2} - 2 \frac{\omega(1 - \cos \theta') + \omega_{LV}(x)}{\omega(1 - \cos \theta')} \frac{\omega_{LV}(x)(1 - x^2)}{\omega(1 - \cos \theta')(1 - x^2)} \right\}, \quad (3.2.35)$$

iz čega slijedi

$$\sigma = \frac{\pi e^4}{2k\omega(1 - \cos \theta')} \int dx \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{2\omega_{LV}(x)}{\omega(1 - \cos \theta')} \right)^2 \right]. \quad (3.2.36)$$

Uz uvjet  $x \in [-1, 1]$ , domena integracije je određena uvjetom koji proizlazi iz delta funkcije izraza



(3.2.33). Naime, radi stroge pozitivnosti člana  $2p_{\perp}^2/(k(1-x^2))$  za sve vrijednosti  $x$ , postavlja se uvjet na pozitivnost  $(\omega - q_x + \omega_{LV})$ . Uočavamo da za integral izraza (3.2.36) postoji problem divergencije uključimo li minimalnu i maksimalnu vrijednost parametra  $x \in [-1, 1]$ . U [27] konkretno se spominje logaritamska divergencija, budući da će rezultat integracije (3.2.36) biti logaritamska funkcija. Vrijednosti parametra  $x = \pm 1$  odgovaraju kinematičkoj konfiguraciji gdje jedan fermion preuzima potpun iznos energije, dok je energija drugog fermiona jednaka nuli. Budući da je takva konfiguracija moguća samo za bezmasene čestice, otklanjamo divergenciju dodavanjem kvadrata mase elektrona u delta funkciji na način  $p_{\perp}^2 \rightarrow p_{\perp}^2 + m^2$  pa imamo

$$\delta\left(\omega - q_x + \omega_{LV}(x) - \frac{2p_{\perp}^2}{k(1-x^2)}\right) \rightarrow \delta\left(\omega - q_x + \omega_{LV}(x) - \frac{2(p_{\perp}^2 + m^2)}{k(1-x^2)}\right). \quad (3.2.37)$$

Dobivenim rezultatom nećemo ponovno provoditi postupak integracije, već samo odrediti granice integracije. Modifikaciju delta funkcije dodavanjem člana mase dodatno opravdavamo time što se do identičnog rezultata dolazi u (3.2.22) uz korištenje izraza za energiju fermiona (3.2.9), pri čemu se ne zanemaruje  $m^2$ . Također, član  $2m^2/(k(1-x^2))$  je puno manji od jedan u limesu visokih energija pa njegovo ubacivanje ne mijenja značajno iznos unutar delta funkcije, ali je s druge strane veći od nule čime se izbjegava divergencija integrala u  $x = \pm 1$ . Iz (3.2.37) imamo  $p_{\perp}^2 = k(1-x^2)[\omega(1-\cos\theta') + \omega_{LV}(x)]/2 - m^2$ . Uz korištenje uvjeta pozitivnosti  $p_{\perp}^2$ , slijedi

$$p_{\perp}^2 > 0 \implies k(1-x^2)[\omega(1-\cos\theta') + \omega_{LV}(x)] - 2m^2 > 0,$$

to jest

$$1-x^2 > \frac{2m^2}{k[\omega(1-\cos\theta') + \omega_{LV}(x)]}. \quad (3.2.38)$$

Iz (3.2.38) slijede granice parametra  $x$

$$|x| < \sqrt{1 - \frac{2m^2}{k[\omega(1-\cos\theta') + \omega_{LV}(x)]}}, \quad (3.2.39)$$

iz čega vidimo da  $|x| < 1$ ,  $\forall k$ , čime smo uklonili divergenciju unutar integrala. Budući da vrijedi  $k[\omega(1 - \cos \theta') + \omega_{LV}(x)] \gg m^2$  za energije  $k$  puno veće od praga reakcije, granice parametra  $x$  možemo aproksimirati kao

$$|x| < 1 - \frac{m^2}{k[\omega(1 - \cos \theta') + \omega_{LV}(x)]} = x'. \quad (3.2.40)$$

Integral (3.2.36) možemo tada zapisati kao

$$\sigma = \frac{\pi e^4}{2k\omega(1 - \cos \theta')} \int_{-x'}^{x'} dx \left( \frac{2}{1 - x^2} - 1 \right) \left[ 1 + \left( 1 + \frac{2\omega_{LV}(x)}{\omega(1 - \cos \theta')} \right)^2 \right], \quad (3.2.41)$$

što se može dodatno pojednostaviti uzimanjem  $\omega_{LV}$  u  $x = 1$ , uz što slijedi

$$\sigma = \frac{\pi e^4}{k\omega(1 - \cos \theta')} \int_{-x'}^{x'} dx \frac{1}{1 - x^2} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{2\omega_{LV}}{\omega(1 - \cos \theta')} \right)^2 \right], \quad (3.2.42)$$

gdje smo eliminirali podintegralnu funkciju  $\left[ 1 + \left( 1 + \frac{2\omega_{LV}}{\omega(1 - \cos \theta')} \right)^2 \right]$  radi simetričnih granica integracije. Integriranjem (3.2.42) dobivamo

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\pi e^4}{k\omega(1 - \cos \theta')} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{2\omega_{LV}(x)}{\omega(1 - \cos \theta')} \right)^2 \right] \\ &\left[ \ln \left( \frac{k[\omega(1 - \cos \theta') + \omega_{LV}]}{m^2} \right) + \ln \left( 2 - \frac{m^2}{k[\omega(1 - \cos \theta') + \omega_{LV}]} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

Uz aproksimaciju  $k[\omega(1 - \cos \theta') + \omega_{LV}] \gg m^2$  koja vrijedi u području visokih energija gama-zrake, konačan rezultat možemo zapisati kao

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2 m^2}{k\omega(1 - \cos \theta')} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{2\omega_{LV}(x)}{\omega(1 - \cos \theta')} \right)^2 \right] \left[ \ln \left( \frac{k[\omega(1 - \cos \theta') + \omega_{LV}]}{m^2} \right) \right]. \quad (3.2.44)$$

Prema [28], dobiveni udarni presjek je izračunat do na logaritamsku preciznost koja se definira kao zadržavanje samo najdominantnijih logaritamskih članova. Ako promatramo raspršenje na

### 48 3. Foton–foton raspršenje u teoriji s operatorima narušenja Lorentzove simetrije

EBL fotonu energije  $\omega \approx 10^{-3}$  eV, iz zadnje aproksimacije slijedi da (3.2.44) počinje biti precizan na energijama gama-zraka tri reda veličine većeg od  $m^2 \approx 10^{11}$  eV. Drugim riječima, u tom slučaju možemo očekivati ispravno ponašanje udarnog presjeka na energijama gama-zrake većim od  $k \approx 10^2$  TeV.

Kako bi mogli usporediti dobiveni rezultat s onim iz drugog poglavlja, uzmimo da su fermionske modifikacije jednake nuli, tj.  $\kappa = g = 0$  pa imamo

$$\omega_{LV} = \frac{\xi k^3}{2M^2} = S \frac{k^3}{2E_{QG,2}^2} \quad (3.2.45)$$

radi argumentacije ispod (3.1.2). Iz (3.2.45) vidimo da se kvadrati skale energija  $M^2$  i  $E_{QG,2}^2$  iz (2.3.5) razlikuju do na faktor  $\xi$

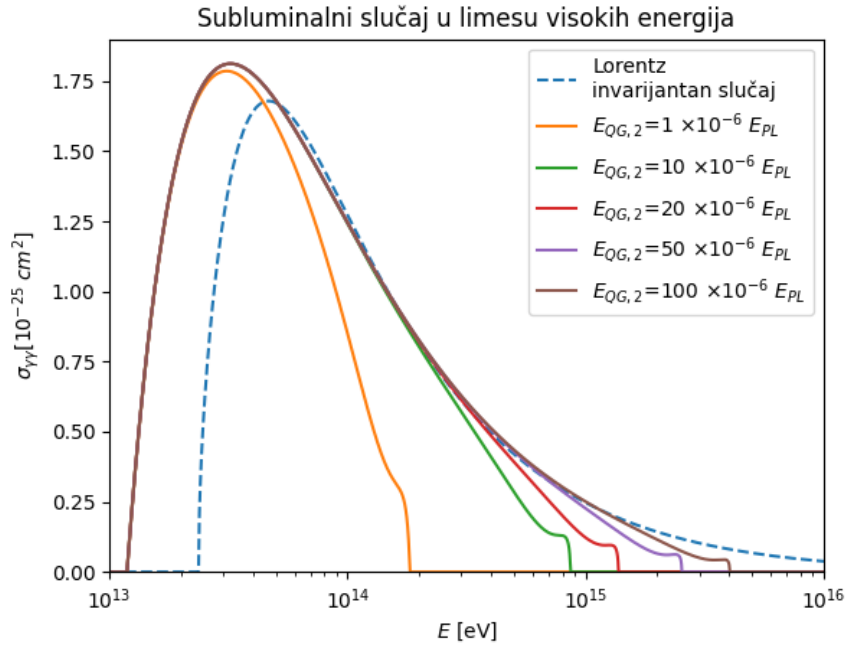
$$E_{QG,2}\sqrt{\xi} = M. \quad (3.2.46)$$

Udarni presjek uz (3.2.45) i prikladno uvrštavanje brzine svjetlosti postaje

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2 m^2 c^4}{k\omega(1 - \cos\theta')} \left[ 1 + \left( 1 + S \frac{k^3}{\omega E_{QG,2}^2 (1 - \cos\theta')} \right)^2 \right] \left[ \ln \left( \frac{k\omega(1 - \cos\theta')}{m^2 c^4} + S \frac{k^4}{2m^2 c^4 E_{QG,2}^2} \right) \right]. \quad (3.2.47)$$

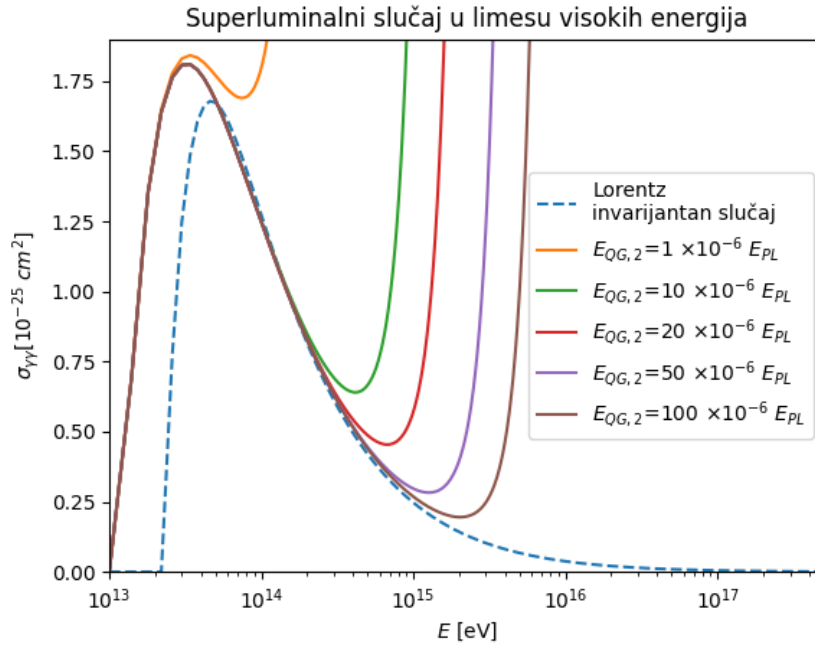
Uobičajeno se eksperimentalno ograničuje parametar  $\xi_1$  u prvom redu ( $n = 1$ ) modifikacije disperzijske relacije, [18] postavlja ograničenje na  $|\xi_1| \leq 10^{-7}$ . U ovom radu se neće diskutirati o eksperimentalnim ograničenjima parametra  $\xi$ , već će se samo naznačiti da za jednaki red veličine modifikacije, vrijednost parametra  $\xi_2$  u  $n = 2$  slučaju (3.1.2) mora biti znatno veća u odnosu na  $n = 1$  slučaj. Razlog toga je obrnuta proporcionalnost s kvadratom skale energije u  $n = 2$  slučaju, za razliku od obrnute proporcionalnosti s linearnom skalom energije u  $n = 1$ .

Na Slici 3.2 prikazan je udarni presjek za subluminalni slučaj za vrijednost parametra  $\xi = 10^{12}$ , gdje se za skalu energije Lorentzovog narušenja uzimaju jednake vrijednosti kao i u prethodnom poglavlju uz dodatno skaliranje parametrom  $\xi$  prema (3.2.45). Vrijednost parametra  $\xi = 10^{12}$  je odabrana iz praktičnog razloga budući da se na tom iznosu pojavljuje značajnija devijacija udar-



Slika 3.2: Udarni presjek za foton–foton raspršenje u aproksimaciji visokih energija modificirane teorije kvantne elektrodinamike. Rezultati su prikazani za EBL foton energije 11 meV kao funkcija energije gama-zrake pri raspršenju uz  $\theta' = \pi$  u subluminalnom slučaju. Iscrtkana plava linija predstavlja Lorentz invarijantni slučaj, pune linije predstavljaju subluminalni slučaj za različite vrijednosti  $E_{QG,2}$ .

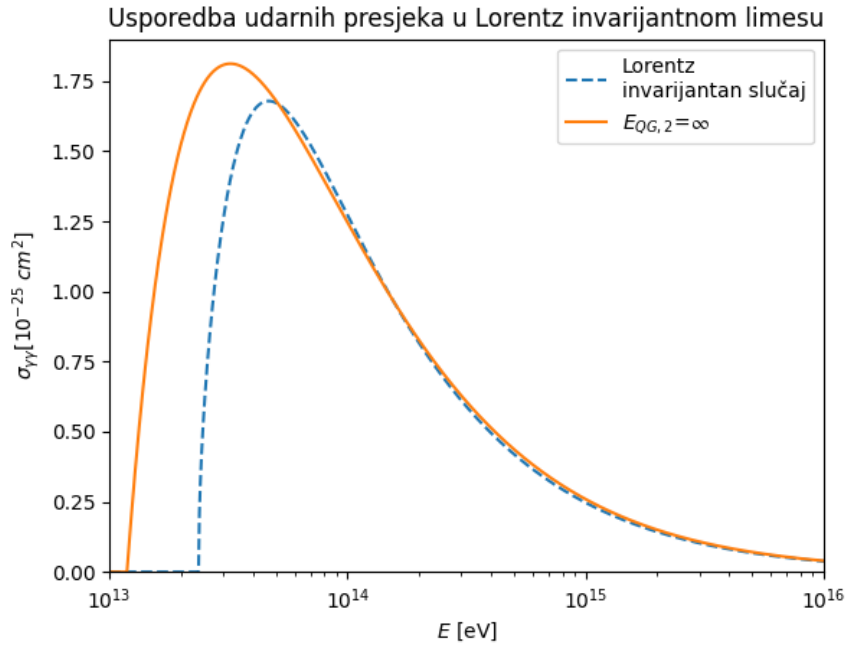
nog presjeka. Slijedi da su odabrane promatrane vrijednosti  $E_{QG,2}$  za  $10^6$  puta manje od  $M$  prema (3.2.46). Ako uzmemo  $M = E_{QG,1}$ , možemo zaključiti da se otprilike jednaki stupanj devijacije od standardnog udarnog presjeka u  $n = 1$  i  $n = 2$  redu modificirane disperzijske relacije pojavljuje za  $E_{QG,1} \approx 10^6 E_{QG,2}$ , što je u skladu s rezultatima [17] gdje su dana eksperimentalna ograničenja  $E_{QG,1} \approx 10^7 E_{QG,2}$ . Za vrijednosti parametra  $\xi < 10^5$ , ne postoji odstupanje od standardnog oblika udarnog presjeka. Samim time može se zaključiti da bi u ovoj teoriji dinamička modifikacija disperzijske relacije za subluminalni slučaj bila zanemariva ako bi se eksperimentalno ograničio parametar na vrijednost manju od  $\xi < 10^5$ . Usporedimo dobiveni subluminalni udarni presjek s onim iz prošlog poglavlja za  $n = 2$  prikazanog na Slici 2.3. Kao u subluminalnom slučaju uz modifikaciju praga reakcije, ponovno se pojavljuju sekundarni maksimumi. Za razliku od udarnog presjeka dobivenog modifikacijom praga reakcije gdje su iznosi primarnih i sekundarnih maksimuma jednaki, sekundarni maksimumi u ovom slučaju su manje izraženi i za sve vrijednosti  $E_{QG,2}$  se nalaze ispod



Slika 3.3: Udarni presjek za foton–foton raspršenje u aproksimaciji visokih energija modificirane teorije kvantne elektrodinamike. Rezultati su prikazani za EBL foton energije 11 meV kao funkcija energije gama-zrake pri raspršenju uz  $\theta' = \pi$  u superluminalnom slučaju. Iscrtkana plava linija predstavlja Lorentz invarijantni slučaj, pune linije predstavljaju superluminalni slučaj za različite vrijednosti  $E_{QG,2}$ .

standardnog udarnog presjeka. Zajednička karakteristika udarnih presjeka u oba pristupa je nagli pad nakon sekundarnog maksimuma, tj. maksimumi i drugi prag reakcije se gotovo podudaraju. Prvi pragovi reakcije su jednaki za sve iznose  $E_{QG,2}$  i dvostruko su manji od Lorentz invarijantnog slučaja što je očekivano s obzirom na aproksimacije uzete u izvodu. Podudaranje prvih pragova reakcije za  $n = 2$  slučaj, zajednička je karakteristika oba pristupa i proizlazi iz zanemarivog iznosa člana korekcije udarnog presjeka u području nižih energija. Nadalje, za dovoljno niske vrijednosti  $E_{QG,2}$ , prag reakcije neće biti postignut te će udarni presjek biti jednak nuli za sve vrijednosti energije gama-zrake kao i na Slici 2.3. Radi proizvoljnog izbora parametra  $\xi$ , karakteristike udarnog presjeka ne prikazujemo u tablici.

Na Slici 3.3 prikazan je udarni presjek (3.2.47) za superluminalni slučaj. Superluminalni slučaj modificirane teorije karakterizira asimptotsko ponašanje udarnog presjeka prema beskonačnosti. Za  $S = +1$  udarni presjek (3.2.47) neograničeno raste porastom energije gama-zrake  $k$  jer ne postoji



Slika 3.4: Usporedba standardnog udarnog presjeka i modificiranog udarnog presjeka u Lorentz invarijantnom limesu  $M \rightarrow \infty$ .

član funkcije koji bi potisnuo rast istog. Udarni presjek posjeduje lokalni minimum nakon kojeg asimptotski teži prema beskonačnosti. Pozicija lokalnog minimuma se smanjuje za veće vrijednosti parametra  $\xi$  ili manje vrijednosti skale energije  $M$ . Potrebno je istražiti je li takvo ponašanje udarnog presjeka posljedica aproksimacija ili je direktna posljedica teorije.

Na Slici 3.4 prikazana je usporedba standardnog i modificiranog udarnog presjeka u Lorentz invarijantnom limesu za  $E_{QG,2} \rightarrow \infty$ . Uz već spomenuto nepodudaranje u području prvog praga reakcije, možemo na Slici 3.4 lakše uočiti i nepodudaranje u području maksimuma. Maksimum modificiranog udarnog presjeka u Lorentz invarijantnom limesu je 8% veći od standardnog. Uočavamo da su udarni presjeci u Lorentz invarijantnom limesu ekvivalentni na vrijednostima većim od  $\approx 10^{14}$  eV kao što je prethodno predviđeno. Za precizniji izračun udarnog presjeka za foton–foton raspršenje u proširenoj kvantnoj elektrodinamici potrebno je provesti račun sa što manje aproksimacija kako bi se prvenstveno postiglo bolje ponašanje u području prvog praga reakcije i maksimuma. Precizno izračunavanje udarnog presjeka u području do maksimuma  $\approx 10^{14}$  eV je bitno budući da je tre-

nutno maksimalna detektirana energija gama zraka reda veličine energije  $10^{14} - 10^{15}$  eV (vidi [14]). Također, izračunavanjem udarnog presjeka izvan ultrarelativističkog limesa je moguće postizanje boljeg uvida u asimptotsko ponašanje superluminalnog slučaja.

### 3.3 Standardni udarni presjek u laboratorijskom sustavu

Kao međukorak na putu do preciznijeg izračuna modificiranog udarnog presjeka, izračunat ćemo standardni udarni presjek za foton–foton raspršenje u laboratorijskom sustavu. Koristimo kinematičku konfiguraciju (3.2.1) i Feynmanova pravila kvantne elektrodinamike. Dio problema smo već riješili u drugom poglavlju. Početna pozicija za računanje usrednjenog kvadrata amplitude vjerojatnosti u laboratorijskom sustavu je (2.2.14) budući da se nakon toga upotrebljava kinematika u sustavu centra mase s Mandelstamovim varijablama. Iako su Mandelstamove varijable Lorentz invarijantne, htjeli bi u potpunosti riješiti problem u laboratorijskom sustavu bez pozivanja na njih kako bi postupak bio primjenjiv i za razmatranje slučaja narušenja Lorentzove simetrije. Izračunamo li trag u (2.2.14) i rezultat zapišemo bez korištenja Mandelstamovih varijabli, uz pomoć programskog paketa *FeynCalc* imamo

$$\begin{aligned} \langle |M_{QED}|^2 \rangle = 32\pi^2 e^4 & \left[ \frac{(p_2 \cdot q)(p_1 \cdot q + m^2) - 2(p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot q) + m^2(p_1 \cdot q) - m^2(p_1 \cdot p_2) - 2m^4}{(p_1 \cdot q)^2} \right. \\ & + \frac{2(p_1 \cdot p_2)^2 + (p_1 \cdot q)^2 - 2(p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot q) + 4m^2(p_1 \cdot p_2) + m^2(p_1 \cdot q)}{(p_1 \cdot q)(p_2 \cdot q)} \\ & \left. + \frac{m^2(p_1 \cdot p_2) - m^2(p_1 \cdot q) + 2m^4}{(p_2 \cdot q)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Izračunajmo umnoške četverovektora pri čemu ćemo u razvoju reda zadržavati samo vodeće članove. Budući da je prema (3.2.10) energija fermiona jednaka  $p_{1,2}^0 = k(1 \pm x)/2$ , umnožak  $p_1 \cdot q$  je

uz (3.2.3) jednak

$$\begin{aligned} p_1 q = p_1^0 q^0 - \mathbf{p}_1 \mathbf{q} &= \frac{k(1+x)}{2} \omega - \left[ \frac{k(1+x)}{2} q_x + \left( \frac{q_y(1+x)}{2} + p_y \right) q_y \right] \\ &\approx \frac{k\omega}{2} (1+x)(1 - \cos \theta'), \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

gdje su se zanemarili svi članovi manjeg reda veličine od  $k\omega$ , poput  $\omega^2$  itd. Okomite komponente  $p_y$  i  $p_z$  su prema (3.2.8) reda veličine  $\sqrt{k\omega}$  jer  $p_y^2 + p_z^2 = p_\perp^2 \propto k\omega$ . Analogno slijedi umnožak  $p_2 \cdot q$

$$p_2 \cdot q \approx \frac{k\omega}{2} (1-x)(1 - \cos \theta'). \quad (3.3.3)$$

Konačno, zadržavanjem članova reda veličine  $k\omega$  dobivamo aproksimirani izraz za umnožak  $p_1 \cdot p_2$

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= p_1^0 p_2^0 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \\ &= \frac{k(1+x)}{2} \frac{k(1-x)}{2} - \left[ \frac{k^2}{4} (1-x^2) + \left( \frac{q_y(1+x)}{2} + p_y \right) \left( \frac{q_y(1-x)}{2} - p_y \right) + p_z^2 \right] \\ &\approx (p_\perp^2 + m^2) \frac{1+x^2}{1-x^2} + p_\perp^2. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Uvrstimo li umnoške (3.3.2)–(3.3.4) u izraz za usrednjeni kvadrat amplitude (3.3.1), nakon sređivanja jednažbe slijedi

$$\begin{aligned} \langle |M_{QED}|^2 \rangle &= 64\pi^2 e^4 \left[ \frac{8m^2 p_\perp^2 (3-x^2)}{k^2 \omega^2 (1-\cos \theta')^2 (1-x^2)^3} + \frac{16p_\perp^4}{k^2 \omega^2 (1-\cos \theta')^2 (1-x^2)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{8p_\perp^2}{k\omega (1-\cos \theta') (1-x^2)^2} + \frac{1+x^2}{1-x^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Ako usporedimo dobiveni usrednjeni kvadrat amplitude s (3.2.12), možemo uočiti da su zadnja tri člana u (3.3.5) zajednička. Prvi član u (3.3.5) je dodatak kvadratu amplitude vjerojatnosti kojeg smo zanemarili uslijed aproksimacije zanemarivanja mase.

Usrednjeni kvadrat amplitude vjerojatnosti uvrštavamo u (3.2.20) budući da pretpostavljamo neovisnost udarnog presjeka o azimutalnom kutu. Koristimo delta funkciju (3.2.37) gdje postavljamo



$\omega_{LV} = 0$  pa slijedi

$$\sigma = \frac{-1}{32\pi k\omega(1 - \cos\theta')} \int dx \frac{|\mathbf{p}_1| dp_1^0 d(\cos\theta)}{p_2^0} \delta\left(\omega - q_x - \frac{2(p_\perp^2 + m^2)}{k(1 - x^2)}\right) \langle |M_{QED}|^2 \rangle. \quad (3.3.6)$$

Preostaje još odrediti oblik faktora  $|\mathbf{p}_1| dp_1^0 d(\cos\theta)/p_2^0$ . U (3.2.28) smo dobili

$$\frac{|\mathbf{p}_1| dp_1^0 d(\cos\theta)}{p_2^0} = k \frac{(1-x)[k^2(1+x)^2 - 2(m^2 + p_\perp^2)]}{(1+x)[k^2(1+x)^2 + 2(m^2 + p_\perp^2)][k^2(1+x)^2 + 2p_\perp^2]} dx dp_\perp^2,$$

što nećemo promatrati u limesu visokih energija kao u (3.2.29). Umjesto toga uzet ćemo u obzir sve doprinose bez zanemarivanja mase elektrona kako bi udarni presjek bio precizan u području svih energija, uključujući i prvi praga reakcije. Iz Tablice 2.2 možemo vidjeti da prag reakcije za standardni udarni presjek iznosi otprilike 24 TeV, dakle u području praga reakcije vrijedi  $k^2 \approx 10^{14}$  TeV. Kvadrat mase elektrona je reda veličine  $m^2 \approx 10^{-1}$  TeV, dok je  $p_\perp^2 \propto k\omega \approx 10^{-2}$  TeV za EBL foton reda veličine meV. Dakle možemo zaključiti da i u području praga reakcije vrijedi  $k^2 \gg m^2, p_\perp^2$ , iz čega slijedi rezultat jednak onome u (3.2.29)

$$\frac{|\mathbf{p}_1| dp_1^0 d(\cos\theta)}{p_2^0} = \frac{dx dp_\perp^2}{k(1-x^2)}.$$

Relativne razlike u veličinama su toliko velike da možemo zaključiti kako je (3.2.29) valjana aproksimacija faktora  $|\mathbf{p}_1| dp_1^0 d(\cos\theta)/p_2^0$  čak i za nekoliko redova veličine manje energije gama-zrake. Možemo čak tvrditi da je (3.2.29) ispravan izraz za sva raspršenja  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  koje u laboratorijskom sustavu zadovoljavaju uvjete  $E_1 \gg E_2$ ,  $E_1 \gg m_3^2 \approx m_4^2 > 0$ . Opći oblik udarnog presjeka za takve sustave uz parametrizaciju (3.2.1) i (3.2.2) glasi

$$\sigma = \frac{1}{32\pi I} \int dx \frac{dp_\perp^2}{k(1-x^2)} \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \langle |M_x|^2 \rangle, \quad (3.3.7)$$

gdje je  $I$  dan s (2.1.17), a je  $M_x$  amplituda vjerojatnosti raspršenja. Uz (3.2.29) izraz (3.3.6)

postaje

$$\sigma = \frac{1}{32\pi k\omega(1 - \cos \theta')} \int dx \frac{dp_{\perp}^2}{k(1 - x^2)} \delta \left( \omega - q_x - \frac{2(p_{\perp}^2 + m^2)}{k(1 - x^2)} \right) \langle |M_{QED}|^2 \rangle, \quad (3.3.8)$$

što nakon integriranja po  $dp_{\perp}^2$  i sređivanja daje

$$\sigma = \frac{8\pi e^4}{k\omega(1 - \cos \theta')} \int dx \left[ \frac{m^2}{2k\omega(1 - \cos \theta')(1 - x^2)} - \left( \frac{m^2}{k\omega(1 - \cos \theta')} \right)^2 \frac{1}{(1 - x^2)^2} + \frac{1 + x^2}{8(1 - x^2)} \right]. \quad (3.3.9)$$

Granice integracije po  $x$  slijede iz uvjeta pozitivnosti  $p_{\perp}^2$  u delta funkciji. Argumentacija analogna onoj iz prošlog potpoglavlja postavlja granice na parametar  $x$

$$|x| < \sqrt{1 - \frac{2m^2}{k\omega(1 - \cos \theta')}} = x'', \quad (3.3.10)$$

gdje ne aproksimiramo izraz uz  $m^2 \ll k\omega$  kao u (3.2.40), budući da takva aproksimacija nije valjana u području praga reakcije gdje vrijedi  $m^2 \approx k\omega$ . Vidimo da integral (3.3.8) u granicama (3.3.10) ne divergira za konačne vrijednosti energije  $k$ . Elementarnom integracijom (3.3.9) uz uvrštavanje brzine svjetlosti slijedi

$$\begin{aligned} \sigma = \pi r_e^2 \frac{m^2 c^4}{k\omega(1 - \cos \theta')} & \left[ \left( 2 + \frac{4m^2 c^4}{k\omega(1 - \cos \theta')} - \frac{4m^4 c^8}{k^2 \omega^2 (1 - \cos \theta')^2} \right) \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2m^2 c^4}{k\omega(1 - \cos \theta')}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{2m^2 c^4}{k\omega(1 - \cos \theta')}}} \right. \\ & \left. - \left( 2 + \frac{4m^2 c^4}{k\omega(1 - \cos \theta')} \right) \sqrt{1 - \frac{2m^2 c^4}{k\omega(1 - \cos \theta')}} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Pomoću supstitucije  $a = k\omega(1 - \cos \theta')/(2m^2 c^4)$  gornji izraz postaje

$$\sigma = \frac{1}{2} \pi r_e^2 \frac{1}{a} \left[ \left( 2 + \frac{2}{a} - \frac{1}{a^2} \right) \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}}} \right] - \left( 2 + \frac{2}{a} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{a}} \right], \quad (3.3.12)$$

što je identično udarnom presjeku dobivenog u sustavu centra mase (2.2.25). Podudaranje udarnih presjeka je potvrda ispravnog izbora aproksimacija u laboratorijskom sustavu. Ipak, treba napomenuti da je egzaktno podudaranje zanimljivo budući da aproksimacijama zanemareni članovi ipak dijelom doprinose udarnom presjeku. Očekivano bi bilo odstupanje faktora u (3.3.11) u odnosu na (2.2.25) za malen, ali konačan realan broj. Moguće je da su se različiti članovi odstupanja međusobno poništili radi simetrične parametrizacije kinematike fermiona (3.2.2).

### 3.4 Korekcija modificiranog udarnog presjeka fotonskih modifikacija

Tehnike prošlog potpoglavlja će pomoći prilikom poboljšavanja izračuna modificiranog udarnog presjeka. Konkretno, promotrimo udarni presjek za foton–foton raspršenje u teoriji (3.1.1), pri čemu zanemarujemo fermionske modifikacije *ab initio*. Motivacija iza razmatranja samo fotonskih modifikacija počiva na snažnim eksperimentalnim ograničenjima fermionske disperzijske relacije kao što je prethodno već spomenuto. U procesu računanja ćemo uključiti masu elektrona radi preciznijeg računanja udarnog presjeka u području praga reakcije.

Za početak, sagledajmo posljedice teorije (3.1.1) uz isključivo razmatranje fotonskih modifikacija. Fermionske modifikacije uslijed narušenja Lorentzove simetrije zanemarujemo postavljanjem  $\kappa = g = 0$ , budući da za te vrijednosti modificirana disperzijska relacija fermiona (3.1.2) postaje standardna. Modificirana disperzijska relacija fotona

$$E_\gamma^2 = (k^0)^2 + \frac{\xi(k^0)^4}{M^2} \quad (3.4.1)$$

i suma po polarizacijama fotona (3.1.3)

$$\sum_{a=1,2} \varepsilon_\mu^{(a)} \varepsilon_\nu^{(b)} = \text{diag}(-E_\gamma^2/(k^0)^2, 1, 1, 1) = -\Theta_{\mu\nu} \quad (3.4.2)$$

ostaju nepromijenjene. Zanimarivanje fermionskih modifikacija mijenja Feynmanova pravila teorije i sume po spinovima čestica. Budući da se uz  $\kappa = g = 0$  pokrata (3.1.6) reducira na standardni izraz  $\tilde{p}^0 = E$ ,  $\tilde{p}^i = p^i$ , izraz (3.1.7) postaje

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^s(p)\bar{u}^s(p) &= \gamma^\mu p_\mu + m \\ \sum_{s=1,2} v^s(p)\bar{u}^s(p) &= \gamma^\mu p_\mu - m, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

a propagator (3.1.8) glasi

$$\text{---}\overrightarrow{p}\text{---} = \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.4.4)$$

što su standardni izrazi u kvantnoj elektrodinamici. Od tri verteksa interakcije preživljava samo  $\mathcal{V}_{1\gamma}^\mu$  koji također poprima standardni oblik

$$\mathcal{V}_{1\gamma}^\mu = -ie\gamma^\mu. \quad (3.4.5)$$

Možemo zaključiti da se pri razmatranju samo fotonskih modifikacija teorije (3.1.1), samo disperzijska relacija fotona (3.4.1) i suma po polarizacijama fotona (3.4.2) razlikuju u odnosu na standardnu kvantnu elektrodinamiku.

Krenimo od općeg izraza za udarni presjek raspršenja (3.3.7) dobivenog u prethodnom potpoglavlju

$$\sigma = \frac{1}{32\pi I} \int dx \frac{dp_\perp^2}{k(1-x^2)} \delta(k^0 + q^0 - p_1^0 - p_2^0) \langle |M_{TOT}|^2 \rangle, \quad (3.4.6)$$

gdje je  $M_{TOT}$  ukupna amplituda raspršenja. Delta funkcija raspršenja bit će jednaka onoj u (3.2.37) uz  $\omega_{LV}(x) \rightarrow \frac{\xi k^3}{2M^2}$  radi definicije (3.2.13) uz  $\kappa = g = 0$

$$\delta\left(\omega - q_x + \frac{\xi k^3}{2M^2} - \frac{2(p_\perp^2 + m^2)}{k(1-x^2)}\right). \quad (3.4.7)$$

### 58 3. Foton–foton raspršenje u teoriji s operatorima narušenja Lorentzove simetrije

Vidimo da  $\omega_{LV}$  više ne ovisi o parametru  $x$  čime se pojednostavljuje integracija po  $x$  u zadnjem koraku računanja udarnog presjeka.  $I$  je prema (3.2.15) jednak

$$I = kq = k^0 q^0 - \mathbf{kq} = k\omega(1 - \cos\theta). \quad (3.4.8)$$

Preostaje još za izračunati usrednjeni kvadrat amplitude vjerojatnosti  $\langle |M_{TOT}|^2 \rangle$ . Budući da pri računanju kvadrata amplitude vjerojatnosti jedinu razliku u odnosu na standardnu elektrodinamiku čini (3.4.2), račun će biti ekvivalentan onome u potpoglavlju 2.2 do jednadžbe (2.2.12)

$$|M_{fi}|^2 = M_{fi} M_{fi}^* = 16\pi^2 e^4 \varepsilon_\mu(k) \varepsilon_\nu(q) \varepsilon_\lambda^*(k) \varepsilon_\sigma^*(q) [\bar{u}(p_1) Q^{\mu\nu} v(p_2)] [\bar{v}(p_2) Q^{\sigma\lambda} u(p_1)].$$

Pomoću (3.4.2) se modificira suma preko polarizacija za gama-zraku, dok za EBL foton uzimamo standardni izraz  $\sum_{a=1,2} \varepsilon_\mu^{(a)} \varepsilon_\nu^{(b)} = -g_{\mu\nu}$ . Iz (2.2.12) nakon Casimirovog trika tada slijedi

$$\langle |M_{TOT}|^2 \rangle = 4\pi^2 e^4 \Theta_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} \text{Tr}\{Q^{\mu\nu}(p_2 - m) Q^{\sigma\lambda}(p_1 + m)\}, \quad (3.4.9)$$

budući da u (2.2.13) radimo zamjenu  $g_{\mu\lambda} \rightarrow \Theta_{\mu\lambda}$ , pri čemu obraćamo pažnju na ispravan izbor indeksa. Metrički tenzor  $\Theta_{\mu\lambda}$  možemo razložiti pomoću (3.4.1)

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\lambda} &= \text{dijag}(E_\gamma^2/(k^0)^2, -1, -1, -1) = \text{dijag}(1 + \xi k^2/M^2, -1, -1, -1) \\ &= g_{\mu\lambda} + \text{dijag}(\xi k^2/M^2, 0, 0, 0) = g_{\mu\lambda} + \Xi_{\mu\lambda}, \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

gdje je  $\Xi_{\mu\lambda} = \text{dijag}(\xi k^2/M^2, 0, 0, 0)$ . (3.4.9) tada postaje

$$\begin{aligned} \langle |M_{TOT}|^2 \rangle &= 4\pi^2 e^4 (g_{\mu\lambda} + \Xi_{\mu\lambda}) g_{\nu\sigma} \text{Tr}\{Q^{\mu\nu}(p_2 - m) Q^{\sigma\lambda}(p_1 + m)\} \\ &= 4\pi^2 e^4 g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} \text{Tr}\{Q^{\mu\nu}(p_2 - m) Q^{\sigma\lambda}(p_1 + m)\} + 4\pi^2 e^4 \Xi_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} \text{Tr}\{Q^{\mu\nu}(p_2 - m) Q^{\sigma\lambda}(p_1 + m)\} \\ &= \langle |M_{ST}|^2 \rangle + \langle |M_{MOD}|^2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

gdje je  $\langle |M_{ST}|^2 \rangle = \langle |M_{QED}|^2 \rangle$  standardni kvadrat amplitude vjerojatnosti (2.2.13) kojeg smo izračunali u (3.3.5), a  $\langle |M_{MOD}|^2 \rangle$  predstavlja fotonsku korekciju. Koristimo li činjenicu da  $\Xi_{\mu\lambda}$  je različit od nule samo na mjestu (0,0) komponente, možemo pojednostaviti usrednjeni kvadrat amplitude vjerojatnosti fotonske korekcije

$$\begin{aligned} \langle |M_{MOD}|^2 \rangle &= 4\pi^2 e^4 \Xi_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} \text{Tr}\{Q^{\mu\nu}(p_2 - m)Q^{\sigma\lambda}(p_1 + m)\} \\ &= 4\pi^2 e^4 \frac{\xi k^2}{M^2} \text{Tr}\{Q^{0\nu}(p_2 - m)Q_{\nu 0}(p_1 + m)\}. \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Pomoću programskog paketa *FeynCalc* izračunat je  $\langle |M_{MOD}|^2 \rangle$  i glasi

$$\begin{aligned} \langle |M_{MOD}|^2 \rangle &= 4\pi^2 e^4 \frac{\xi k^2}{M^2} \frac{1}{(p_1 \cdot q)^2 (p_2 \cdot q)^2} \left\{ (p_1 \cdot q)(p_2 \cdot q) [2(p_1 \cdot p_2)^2 + (p_2 \cdot q)^2 + (p_2 \cdot q)^2] \right. \\ &+ 2(p_1 \cdot p_2)(p_1^0 \cdot q^0 - p_2 \cdot q + p_1^0(\omega - 2p_1^0) + m^2) + (p_2 \cdot q)(p_2 \cdot q - 2(p_1^0)^2 + 2p_2^0(p_1^0 - q^0) + m^2) + 2m^2(q^0)^2 \\ &\quad \left. - m^2(p_2 \cdot q)^2(p_1 \cdot p_2 - p_2 \cdot q + 2p_2^0(q^0 - p_1^0) + m^2) + (p_1 \cdot q)^3(p_2 \cdot q + m^2) \right. \\ &\quad \left. - (p_1 \cdot q)^2 [-(p_2 \cdot q)(m^2 + 2p_1^0(p_2^0 - q^0) - 2(p_2^0)^2) + (p_1 \cdot p_2)(2(p_2 \cdot q) + m^2) + 2m^2 p_1^0(q^0 - p_2) + m^4] \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Prisutnost članova energije u kvadratu amplitude vjerojatnosti (3.4.13) posljedica je uzimanja traga  $Q^{0\mu}$  matrice koja sadrži  $\gamma^0$ . Uvrštavanjem umnožaka (3.3.2)–(3.3.4), vodećih članova energija fermiona (3.2.10) i energije EBL fotona  $q^0 = \omega$ , nakon pojednostavljenja jednadžbe programom *Mathematica* imamo

$$\begin{aligned} \langle |M_{MOD}|^2 \rangle &= 64\pi^2 e^4 \frac{\xi k^2}{M^2} \left\{ \frac{\csc^4(\theta'/2) \cos \theta' p_\perp^2}{k\omega(1-x^2)^2} - \frac{\csc^4(\theta'/2) m^2 x^2}{k\omega(1-x^2)^2} \right. \\ &+ \frac{8m^2 p_\perp^2}{k^2 \omega^2 (1 - \cos \theta')^2 (1 - x^2)^3} + \frac{2m^2}{k^2 (1 - \cos \theta')^2 (1 - x^2)} + \frac{8p_\perp^4}{k^2 \omega^2 (1 - \cos \theta')^2 (1 - x^2)^3} \\ &\quad \left. - \frac{2p_\perp^2}{\omega^2 (1 - \cos \theta')^2 (1 - x^2)} - \frac{(1+x^2)(1 - \cos(2\theta'))}{4(1-x^2)(1 - \cos \theta)^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Problem asimptotskog ponašanja udarnog presjeka u superluminalnom slučaju uzrokovan je pred-

### 60 3. Foton–foton raspršenje u teoriji s operatorima narušenja Lorentzove simetrije

zadnjim članom kvadrata amplitude vjerojatnosti (3.4.14)

$$\frac{2p_{\perp}^2}{\omega^2(1 - \cos \theta)^2(1 - x^2)} \quad (3.4.15)$$

koji je jedini proporcionalan s  $k$  radi  $p_{\perp}^2/\omega^2 \propto k\omega/\omega^2 = k/\omega$ , dok su ostali reda veličine  $< 1$ . Nakon integracije člana se zadržava proporcionalnost s  $k$ , što uzrokuje asimptotsko ponašanje prema beskonačnosti. Možemo zaključiti da je asimptotsko ponašanje superluminalnog presjeka direktna posljedica teorije u kojoj razmatramo samo fotonske modifikacije. Iz (3.4.6) tada imamo

$$\sigma_{TOT} = \frac{1}{32\pi k\omega(1 - \cos \theta)} \int dx \frac{dp_{\perp}^2}{k(1 - x^2)} \delta \left( \omega - q_x + \frac{\xi k^3}{2M^2} - \frac{2(p_{\perp}^2 + m^2)}{k(1 - x^2)} \right) ( \langle |M_{QED}|^2 \rangle + \langle |M_{MOD}|^2 \rangle ), \quad (3.4.16)$$

što možemo podijeliti na dva integrala  $\sigma_{TOT} = \sigma_{QED} + \sigma_{MOD}$

$$\sigma_{QED} = \frac{1}{32\pi k\omega(1 - \cos \theta)} \int dx \frac{dp_{\perp}^2}{k(1 - x^2)} \delta \left( \omega - q_x + \frac{\xi k^3}{2M^2} - \frac{2(p_{\perp}^2 + m^2)}{k(1 - x^2)} \right) \langle |M_{QED}|^2 \rangle \quad (3.4.17)$$

$$\sigma_{MOD} = \frac{1}{32\pi k\omega(1 - \cos \theta)} \int dx \frac{dp_{\perp}^2}{k(1 - x^2)} \delta \left( \omega - q_x + \frac{\xi k^3}{2M^2} - \frac{2(p_{\perp}^2 + m^2)}{k(1 - x^2)} \right) \langle |M_{MOD}|^2 \rangle \quad (3.4.18)$$

Primijetimo da je  $\sigma_{QED}$  različit od (3.3.8) u potpoglavlju 3.3 zbog dodatka  $\frac{\xi k^3}{2M^2}$  delta funkciji pa ne možemo koristiti rezultat (3.3.11). Granice integracije slijede iz delta funkcije, ekvivalentne su (3.2.39) uz  $\omega_{LV}(x) \rightarrow \frac{\xi k^3}{2M^2}$  i glase

$$|x| < \sqrt{1 - \frac{2m^2}{k[\omega(1 - \cos \theta') + \frac{\xi k^3}{2M^2}]} = x''}. \quad (3.4.19)$$

Iskoristimo ovu priliku da komentiramo kinematiku fermiona u ovisnosti o parametru  $x$ . U prvom pragu reakcije vrijedi  $2m^2 = k[\omega(1 - \cos \theta') + \frac{\xi k^3}{2M^2}]$  pa iz (3.4.19) možemo zaključiti da je tada jedina dopuštena vrijednost parametra  $x = 0$ . Uzmemo li tu činjenicu u obzir i parametrizaciju (3.2.2), vidimo da u području prvog praga reakcije oba fermiona preuzimaju otprilike jednak iznos

impulsa fotona. Samim time, u području prvog praga reakcije ukupne energije fermiona su otprilike jednake. Pronađimo maksimalan odklon fermiona  $\theta$  od smjera gibanja gama-zrake. Iz jednadžbe (3.2.27) i delta funkcije izraza (3.4.16) pomoću koje izražavamo  $p_{\perp}^2$ , za  $p_1$  slijedi

$$\cos \theta = \frac{k^2(1+x)^2}{k^2(1+x)^2 + 2p_{\perp}^2} = \frac{k^2(1+x)^2}{k^2(1+x)^2 + k(1-x^2)[\omega(1-\cos \theta') + \frac{\xi k^3}{2M^2}] - 2m^2}. \quad (3.4.20)$$

Kako u području prvog praga reakcije imamo  $x \approx 0$ , uz pretpostavku raspršenja uz  $\theta' = \pi$  i zadržavanja dominantnih članova imamo

$$\cos \theta = \frac{k^2}{k^2 + k[2\omega + \frac{\xi k^3}{2M^2}] - 2m^2} \approx 1, \quad (3.4.21)$$

slijedi da je smjer oba fermiona otprilike jednak smjeru gama-zrake :  $\theta \approx \theta' = 0$ , budući da (3.4.21) vrijedi i za  $p_2$ . Za  $x = 0$  trajektorije fermiona nisu kolinearne, što bi izazvalo automatsku anihilaciju, radi pristutnosti  $\pm p_y$  u y-komponenti impulsa (3.2.2). Sljedeće, promotrimo slučaj velike maksimalne apsolutne vrijednosti parametra  $x$ . Iz (3.4.19) možemo zaključiti da za fiksnu vrijednost energije EBL fotona, maksimalna apsolutna vrijednost parametra  $x$  teži prema 1 porastom energije gama-zrake. Drugim riječima, porastom energije gama-zrake povećava se moguća asimetrija energija fermiona. Izračunajmo maksimalnu apsolutnu vrijednost parametra  $x$  za dane energije fotona pri raspršenju uz  $\theta' = \pi$ . Biramo ekstreman slučaj energije gama-zrake reda veličine  $10^{15} \sim 10^{16}$  eV radi proučavanja rubnog slučaja. Neka je energija gama-zrake jednaka  $5 \times 10^{15}$  eV, energija EBL fotona jednaka  $11 \cdot 10^{-3}$  eV, parametar  $|\xi| = 10^{12}$ , a  $M = 100 E_{PL}$ . Tada je  $\max(|x|) = 0.9973$  za subluminalan, a  $\max(|x|) = 0.9978$  za superluminalan slučaj. Kosinusi kuta  $\theta$  za  $p_1$  i  $p_2$  su jednaki

$$\cos \theta_{1,2} = \frac{k^2(1 \pm x)^2}{k^2(1 \pm x)^2 + k(1 - x^2)[\omega(1 - \cos \theta') + \frac{\xi k^3}{2M^2}] - 2m^2}, \quad (3.4.22)$$

iz čega nakon uvrštavanja maksimalnu vrijednost parametra  $x$  za subluminalan slučaj, ponovno



### 62 3. Foton–foton raspršenje u teoriji s operatorima narušenja Lorentzove simetrije

slijedi  $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta' = 0$  zbog dominacije člana  $k^2(1-x^2)$  u nazivniku razlomka. Značajne devijacije od smjera gibanja gama-zrake ne odvijaju se ni na mnogo većim energijama  $k \approx 10^{18}$  eV za koje je  $\max(|x|)$  puno bliži vrijednosti 1. Takve energije su puno veće od drugog praga reakcije za subluminalan, ali teorijski dostupne za superluminalan i standardni slučaj. U standardnom slučaju  $\xi = 0$  za  $k = 10^{18}$  eV imamo  $|x| < 0.999988$  pa opet slijedi  $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta' = 0$ . Član  $k^2(1-x^2)$  će biti dominantan u nazivniku razlomka za sve energije  $k$  te će posljedično kosinus kuta uvijek biti otprilike jednak 1, čak i uz utjecaj člana Lorentz narušenja. Dakle možemo zaključiti da se za sve energije  $k$ , nakon raspršenja oba fermiona se gibaju u smjeru gama-zrake s minimalnim odklonom, neovisno o prisutnosti narušenja Lorentzove simetrije. Za velike apsolutne vrijednosti parametra  $x$ , energije fermiona se značajno razlikuju radi (3.2.10).

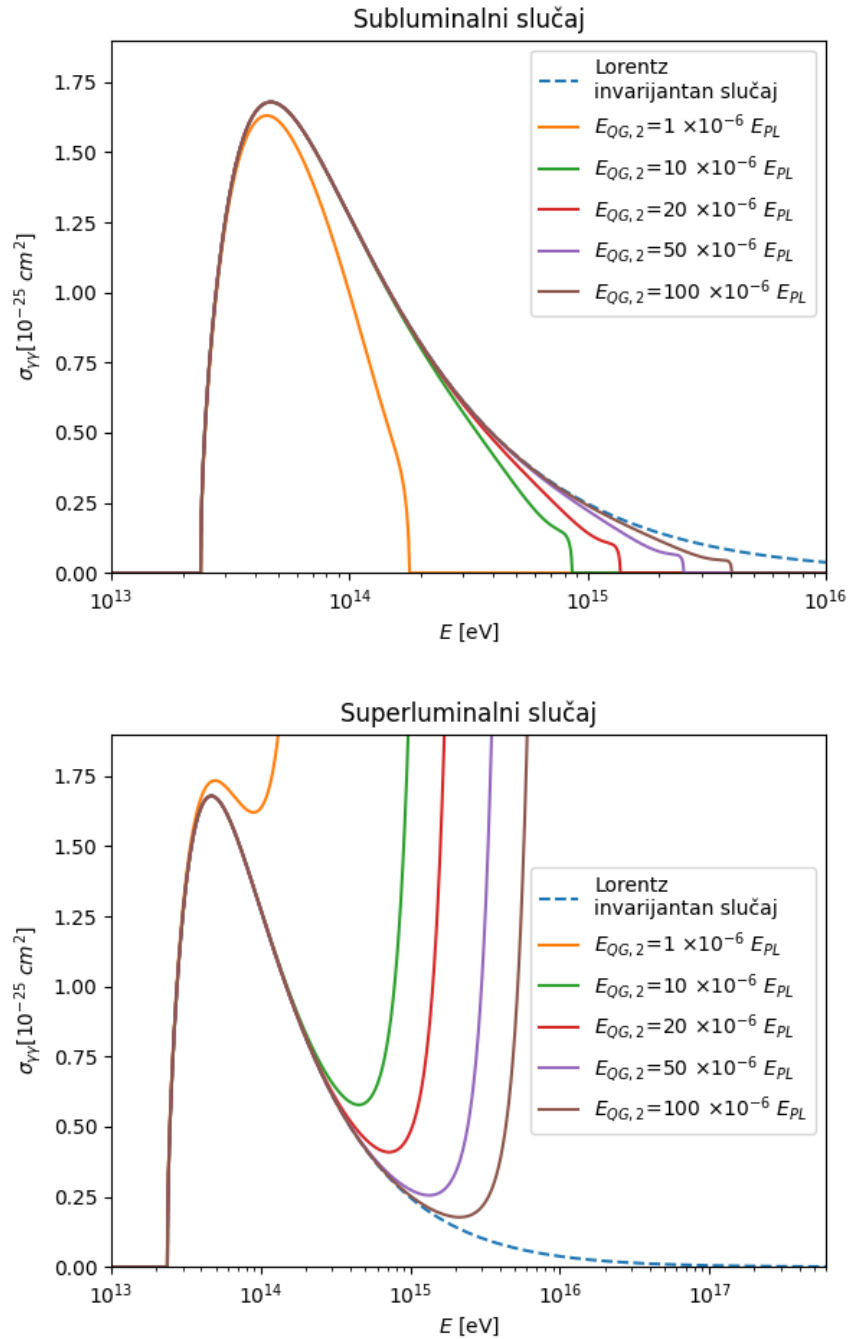
Usrednjene kvadrature amplitude vjerojatnosti (3.3.5) i (3.4.14) uvrštavamo u jednadžbe (3.4.17) i (3.4.18), nakon elementarne integracije slijede izrazi za udarne presjeke

$$\sigma_{QED} = \pi r_e^2 \frac{m^2}{k\omega(1-\cos\theta')} \left\{ \left[ \frac{4m^2}{k\omega(1-\cos\theta')} - \frac{4m^4}{k^2\omega^2(1-\cos\theta')^2} - \frac{4\Delta^2}{\omega^2(1-\cos\theta')^2} - \frac{4\Delta}{\omega(1-\cos\theta')} + 2 \right] \times \right. \\ \left. \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2m^2}{k\Delta}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{2m^2}{k\Delta}}} + \left[ \frac{4\Delta}{\omega(1-\cos\theta')} - \frac{4\Delta^2}{\omega^2(1-\cos\theta')^2} - \frac{4m^2\Delta}{k\omega^2(1-\cos\theta')^2} - 2 \right] \sqrt{1 - \frac{2m^2}{k\Delta}} \right\}, \quad (3.4.23)$$

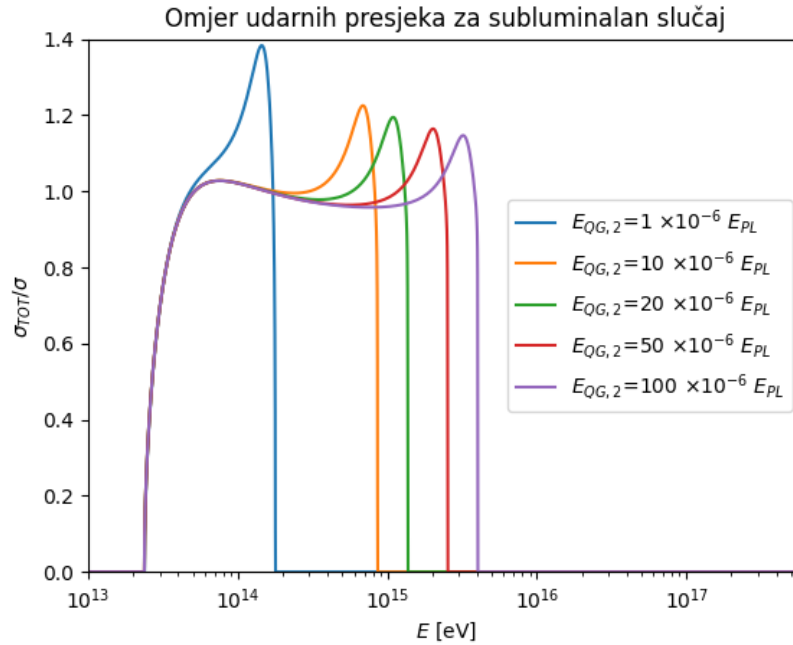
$$\sigma_{MOD} = \pi r_e^2 \frac{m^2}{k\omega(1-\cos\theta')} \frac{\xi k^2}{M^2} \left\{ \left[ \frac{\csc^4\theta'/2 \cos\theta'\Delta}{2\omega} + \frac{2m^2}{k^2(1-\cos\theta')^2} + \frac{2\Delta^2}{\omega^2(1-\cos\theta')^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2m^2}{\omega^2(1-\cos\theta')^2} - \frac{m^2 \csc^4(\theta'/2) \cos\theta'}{2k\omega} - \frac{2m^2\Delta}{k\omega^2(1-\cos\theta')^2} + \frac{\csc^4(\theta'/2)m^2}{2k\omega} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1-\cos(2\theta')}{2(1-\cos\theta')^2} \right] \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2m^2}{k\Delta}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{2m^2}{k\Delta}}} - \left[ \frac{\csc^4(\theta'/2) \cos\theta'\Delta}{2\omega} + \frac{2\Delta^2}{\omega^2(1-\cos\theta')^2} + \frac{\csc^4(\theta'/2)\Delta}{2\omega} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2k\Delta}{\omega^2(1-\cos\theta')^2} - \frac{1-\cos(2\theta')}{2(1-\cos\theta')^2} \right] \sqrt{1 - \frac{2m^2}{k\Delta}} \right\}, \quad (3.4.24)$$

gdje je  $\Delta = \omega(1 - \cos \theta') + \frac{\xi k^3}{2M^2}$ . Može se vidjeti da za  $\xi \rightarrow 0$  udarni presjek  $\sigma_{TOT}$  postaje jednak standardnom udarnom presjeku (3.3.12). Predzadnji član u (3.4.24) jest rezultat integracije člana (3.4.15) i dominantan je faktor uzroka asimptotskog ponašanja u superluminalnom slučaju. Grafički prikazi  $\sigma_{TOT} = \sigma_{QED} + \sigma_{MOD}$  za subluminalni i superluminalni slučaj raspršenja pri  $\theta' = \pi$  prikazani su na Slici 3.5. Koristimo (3.2.45) za povezivanje  $M$  i  $E_{QG,2}$  pomoću  $\xi$ . U odnosu na udarne presjeke iz potpoglavlja 3.3 (slike 3.2 i 3.3), uočava se podudaranje udarnih presjeka s standardnim u području prvog praga reakcije, ali i prvog maksimuma, što je očekivano s obzirom na izbor aproksimacija i argumentaciju o relativnim omjerima na stranici 50. Za velike vrijednosti  $E_{QG,2}$ , modificirani udarni presjek u potpunosti prati standardni udarni presjek čak i nakon prvog maksimuma. Karakteristike udarnih presjeka u području energija puno većih od praga reakcije, prethodno viđenih u potpoglavlju 3.3, su pristutne i u ovom slučaju. Takav ishod je očekivan s obzirom da su u ultrarelativističkom limesu oba pristupa ekvivalentna. Omjer udarnih presjeka  $\sigma_{TOT}$  i  $\sigma$  dobivenog u ultrarelativističkom limesu (3.2.47), prikazan je na Slici 3.6 za subluminalan slučaj. Uz korekcije u području prvog praga reakcije viđene na Slici 3.5, na Slici 3.6 uočavaju se i korekcije u području viših energija, tj. oko sekundarnog maksimuma. Ako pogledamo Sliku 3.5, vrijednosti sekundarnih maksimuma subluminalnog slučaja su ponovno manje od vrijednosti standardnog udarnog presjeka na istim energijama. Superluminalni slučaj i dalje strogo prati standardni udarni presjek do točke nakon kojeg se asimptotski kreće prema beskonačnosti što je očekivano s obzirom na diskusiju ispod (3.4.14).

U svakom slučaju, dinamičke korekcije udarnih presjeka za superluminalan i subluminalan slučaj su zanemarive u području do prvog (glavnog) maksimuma koji se nalazi na  $\approx 100$  TeV. Budući da se većina detektiranih gama-zraka nalazi ispod energije od 100 TeV, možemo zaključiti da je detekcija dinamičkih korekcija uslijed narušenja Lorentzove simetrije moguća samo u slučaju najrjeđih UHE (ultra-high-energy) gama-zraka. Napomenimo da tvrdnja vrijedi samo za raspršenje na EBL fotonu energije reda veličine meV, za EBL fotone većih ili manjih energija karakter udarnog presjeka se mijenja. Cjelokupni postupak ovog poglavlja moguće je primijeniti i za ostale parove



Slika 3.5: Udarni presjek foton–foton raspršenja u modificiranoj teoriji kvantne elektrodinamike za EBL foton energije 11 meV kao funkcija energije gama-zrake pri raspršenju uz  $\theta' = \pi$ . **(Gore)** Iscrtkana plava linija predstavlja udarni presjek u slučaju očuvane Lorentzove simetrije, pune linije predstavljaju subluminalni slučaj za različite vrijednosti  $E_{QG,2}$ . **(Dolje)** Iscrtkana plava linija predstavlja udarni presjek u slučaju očuvane Lorentzove simetrije, pune linije predstavljaju superluminalni slučaj za različite vrijednosti  $E_{QG,2}$ .



Slika 3.6: Omjer udarnih presjeka  $\sigma_{TOT}$  i  $\sigma$  foton–foton raspršenja kao funkcija energije gama-zrake. Pri-kazan je omjer udarnih presjeka za subluminalni slučaj pri raspršenju uz  $\theta' = \pi$ ,  $E_{QG,2} = 50 \times 10^{-6} E_{PL}$  za energiju EBL fotona od 11 meV.

čestica–antičestica u izlaznom kanalu foton–foton raspršenja pomoću zamjene mase elektrona s odgovarajućom masom izlaznih čestica.

### 3.5 Dodatni komentari

Dobiveni modificirani udarni presjeci (3.4.23) i (3.4.24) su izračunati uz uzimanje raznih aproksi-macija. Uzimanje aproksimacija bilo je nužno radi pojednostavljenja inače veoma kompliciranih jednadžbi, pri čemu se uvijek obraćala pažnja na valjanost uzetih aproksimacija. U poglavlju 3.3 su se jedino zanemarivali članovi prilikom izračuna energija i impulsa čestica i to oni koji su najmanje  $10^{10}$  puta manji od vodećeg člana. Računanjem bez ikakvih aproksimacija i uzimanjem zanemari-vih članova u obzir bi se samo zakomplicirao račun i ne bi došlo do značajnih korekcija konačnog rezultata. Sve korištene aproksimacije su opravdane u području energija u kojima radimo što po-

tvrdi precizno izračunat standardni udarni presjek u laboratorijskom sustavu (3.3.11). Budući da su se prilikom računanja  $\sigma_{TOT}$  koristile aproksimacije jednakog reda veličine kao i za standardni udarni presjek, možemo tvrditi da su udarni presjeci (3.4.23) i (3.4.24) također precizno izračunati. U području prvog praga reakcije i maksimuma prate standardni udarni presjek u limesu velikih vrijednosti  $E_{QG,2}$ , što je i traženo svojstvo s obzirom da (3.1.1) za  $E_{QG,2} \rightarrow \infty$  teži u Lagranžijan standardne kvantne elektrodinamike.

Iako na prvi pogled asimptotsko ponašanje superluminalnog slučaja izgleda problematično i neobično, takav rezultat nije neočekivan u teoriji (3.1.1). Razni udarni presjeci i širine raspada dobivenih u proširenoj kvantnoj elektrodinamici asimptotski teže prema beskonačnosti. U [27] izračunata je širina raspada fotona u vakuumu koja je proporcionalna s

$$\Gamma_{\gamma \rightarrow e^+e^-} \propto \frac{k^3}{M^2}. \quad (3.5.1)$$

Usporedbe radi, konačan udarni presjek  $\sigma_{TOT}$  je u području visokih energija za superluminalan slučaj proporcionalan s  $\frac{\xi^2 k^7}{M^6}$  radi  $\Delta \propto \frac{\xi k^3}{M^2}$ . Asimptotsko ponašanje superluminalnog udarnog presjeka je moguće detaljnije proučiti ako se usporedi sa ostalim divergentnim udarnim presjecima i širinama raspada teorije (3.1.1).

# Zaključak

U ovom radu analiziralo se foton–foton raspršenje u okviru kvantne elektrodinamike i narušenja Lorentzove simetrije. Nakon uvodnog pregleda narušenja Lorentzove simetrije i modificirane disperzijske relacije, opisano je testiranje narušenja Lorentzove simetrije. Koristeći formalizam kvantne elektrodinamike izvedeno je općenito Fermijevo zlatno pravilo koje se primijenilo na slučaj foton–foton raspršenja kako bi izračunali standardni udarni presjek u sustavu centra mase. Dobiveni udarni presjek za foton–foton raspršenje je promotren u kontekstu narušenja Lorentzove simetrije pomoću kinematičke modifikacije praga reakcije, opisani su superluminalni i subluminalni udarni presjeci. Analizirana su geometrijska svojstva modificiranih udarnih presjeka pomoću programskog koda koja su povezana s energijama fotona.

Nadalje, dan je pregled proširenja kvantne elektrodinamike s operatorima narušenja Lorentzove simetrije do dimenzije 6 pomoću koje se razmatraju dinamičke promjene uzrokovane narušenjem Lorentzove simetrije. Koristeći proširenu teoriju kvantne elektrodinamike izveden je modificirani udarni presjek za foton–foton raspršenje u limesu visokih energija gama–zrake. Pomoću identične parametrizacije kinematike, egzaktno je izračunat standardni udarni presjek u laboratorijskom sustavu. Dobiven je opći oblik udarnog presjeka u laboratorijskom sustavu koji se može primijeniti i za razne vrste raspršenja. Primjenjujući rezultat standardnog udarnog presjeka u laboratorijskom sustavu, odbacuje se ultrarelativistička aproksimacija i preciznije računa modificirani udarni presjek za foton–foton raspršenje u području prvog praga reakcije. Analizirana je kinematika sustava i pokazano je da se elektron i pozitron u izlaznom kanalu gibaju u smjeru gama-zrake s minimalnim

otklonom. Zaključeno je da se dinamičke modifikacije udarnog presjeka raspršenja gama-zraka i EBL fotona energije reda veličine meV očituju na energijama većim od  $10^2$  TeV. Metode ovog rada jednostavno se mogu generalizirati i za ostale parove čestica–antičestica u izlaznom kanalu foton–foton raspršenja.

U budućim istraživanjima potrebno je istražiti divergenciju udarnog presjeka superluminalnog slučaja usporedbom s ostalim divergentnim procesima u proširenoj teoriji kvantne elektrodinamike.

# Bibliografija

- [1] A. Abada et al. HE-LHC: The High-Energy Large Hadron Collider: Future Circular Collider Conceptual Design Report Volume 4. *Eur. Phys. J. ST*, 228(5):1109–1382, 2019. doi:[10.1140/epjst/e2019-900088-6](https://doi.org/10.1140/epjst/e2019-900088-6).
- [2] H. Abdalla and M. Böttcher. Lorentz Invariance Violation Effects on Gamma–Gamma Absorption and Compton Scattering. *Astrophys. J.*, 865(2):159, 2018, [1809.00477](https://arxiv.org/abs/1809.00477). doi:[10.3847/1538-4357/aadb87](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aadb87).
- [3] F. Aharonian. The time averaged TeV energy spectrum of mkn 501 of the extraordinary 1997 outburst as measured with the stereoscopic Cherenkov telescope system of hegra. *Astron. Astrophys.*, 349:11–28, 1999, [astro-ph/9903386](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9903386).
- [4] M. L. Ahnen et al. Constraining Lorentz invariance violation using the Crab Pulsar emission observed up to TeV energies by MAGIC. *Astrophys. J. Suppl.*, 232(1):9, 2017, [1709.00346](https://arxiv.org/abs/1709.00346). doi:[10.3847/1538-4365/aa8404](https://doi.org/10.3847/1538-4365/aa8404).
- [5] D. Anselmi and M. Taiuti. Vacuum Cherenkov Radiation In Quantum Electrodynamics With High-Energy Lorentz Violation. *Phys. Rev. D*, 83:056010, 2011, [1101.2019](https://arxiv.org/abs/1101.2019). doi:[10.1103/PhysRevD.83.056010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.056010).
- [6] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii. *Quantum Electrodynamics*, volume 4 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [7] F. Bezrukov and H. M. Lee. Model dependence of the bremsstrahlung effects from the superluminal neutrino at OPERA. *Phys. Rev. D*, 85:031901, 2012, [1112.1299](https://arxiv.org/abs/1112.1299). doi:[10.1103/PhysRevD.85.031901](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.031901).
- [8] S. D. Biller et al. Limits to quantum gravity effects from observations of TeV flares in active galaxies. *Phys. Rev. Lett.*, 83:2108–2111, 1999, [gr-qc/9810044](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9810044). doi:[10.1103/PhysRevLett.83.2108](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.2108).
- [9] D. J. Bird et al. Detection of a cosmic ray with measured energy well beyond the expected spectral cutoff due to cosmic microwave radiation. *Astrophys. J.*, 441:144–150, 1995, [astro-ph/9410067](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9410067). doi:[10.1086/175344](https://doi.org/10.1086/175344).



- 
- [10] J. Biteau and D. A. Williams. The extragalactic background light, the Hubble constant, and anomalies: conclusions from 20 years of TeV gamma-ray observations. *Astrophys. J.*, 812(1):60, 2015, [1502.04166](https://doi.org/10.1088/0004-637X/812/1/60). doi:[10.1088/0004-637X/812/1/60](https://doi.org/10.1088/0004-637X/812/1/60).
- [11] O. Blanch and M. Martinez. Exploring the gamma-ray horizon with the next generation of gamma-ray telescopes. 1. Theoretical predictions. *Astropart. Phys.*, 23:588–597, 2005, [astro-ph/0107582](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0107582). doi:[10.1016/j.astropartphys.2005.03.008](https://doi.org/10.1016/j.astropartphys.2005.03.008).
- [12] P. A. Bolokhov and M. Pospelov. Classification of dimension 5 Lorentz violating interactions in the standard model. *Phys. Rev. D*, 77:025022, 2008, [hep-ph/0703291](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0703291). doi:[10.1103/PhysRevD.77.025022](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.025022).
- [13] G. I. Burde. Lorentz Violation by the Preferred Frame Effects and Cosmic and Gamma Ray Propagation. *Galaxies*, 9(4):119, 2021. doi:[10.3390/galaxies9040119](https://doi.org/10.3390/galaxies9040119).
- [14] Z. Cao and F. Aharonian. Ultrahigh-energy photons up to 1.4 petaelectronvolts from 12  $\gamma$ -ray Galactic sources. 594(7861):33–36, June 2021. doi:[10.1038/s41586-021-03498-z](https://doi.org/10.1038/s41586-021-03498-z).
- [15] J. M. Carmona, J. L. Cortes, and D. Mazon. Uncertainties in Constraints from Pair Production on Superluminal Neutrinos. *Phys. Rev. D*, 85:113001, 2012, [1203.2585](https://arxiv.org/abs/1203.2585). doi:[10.1103/PhysRevD.85.113001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.113001).
- [16] D. Colladay and V. A. Kostelecky. Cross-sections and Lorentz violation. *Phys. Lett. B*, 511:209–217, 2001, [hep-ph/0104300](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0104300). doi:[10.1016/S0370-2693\(01\)00649-9](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(01)00649-9).
- [17] M. Fairbairn, A. Nilsson, J. Ellis, J. Hinton, and R. White. The CTA Sensitivity to Lorentz-Violating Effects on the Gamma-Ray Horizon. *JCAP*, 06:005, 2014, [1401.8178](https://arxiv.org/abs/1401.8178). doi:[10.1088/1475-7516/2014/06/005](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2014/06/005).
- [18] Y.-Z. Fan, D.-M. Wei, and D. Xu. Gamma-ray Burst UV/optical afterglow polarimetry as a probe of Quantum Gravity. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 376:1857–1860, 2006, [astro-ph/0702006](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0702006). doi:[10.1111/j.1365-2966.2007.11576.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.11576.x).
- [19] A. Franceschini. Photon–Photon Interactions and the Opacity of the Universe in Gamma Rays. *Universe*, 7(5):146, 2021. doi:[10.3390/universe7050146](https://doi.org/10.3390/universe7050146).
- [20] R. J. Gould and G. P. Schreder. Pair Production in Photon-Photon Collisions. *Phys. Rev.*, 155:1404–1407, 1967. doi:[10.1103/PhysRev.155.1404](https://doi.org/10.1103/PhysRev.155.1404).
- [21] D. J. Griffiths. *Introduction to elementary particles; 2nd rev. version*. Physics textbook. Wiley, New York, NY, 2008. URL <https://cds.cern.ch/record/111880>.
- [22] U. Jacob and T. Piran. Inspecting absorption in the spectra of extra-galactic gamma-ray sources for insight on Lorentz invariance violation. *Phys. Rev. D*, 78:124010, 2008, [0810.1318](https://arxiv.org/abs/0810.1318). doi:[10.1103/PhysRevD.78.124010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.124010).

- 
- [23] T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly. A Strong astrophysical constraint on the violation of special relativity by quantum gravity. *Nature*, 424:1019–1021, 2003, [astro-ph/0212190](#). doi:[10.1038/nature01882](#).
- [24] V. A. Kostelecky and N. Russell. Data Tables for Lorentz and CPT Violation. *Rev. Mod. Phys.*, 83:11–31, 2011, [0801.0287](#). doi:[10.1103/RevModPhys.83.11](#).
- [25] L. Maccione, A. M. Taylor, D. M. Mattingly, and S. Liberati. Planck-scale Lorentz violation constrained by Ultra-High-Energy Cosmic Rays. *JCAP*, 04:022, 2009, [0902.1756](#). doi:[10.1088/1475-7516/2009/04/022](#).
- [26] D. Mattingly. Have we tested Lorentz invariance enough? In *From Quantum to Emergent Gravity: Theory and Phenomenology*, 2 2008, [0802.1561](#).
- [27] G. Rubtsov, P. Satunin, and S. Sibiryakov. On calculation of cross sections in Lorentz violating theories. *Phys. Rev. D*, 86:085012, 2012, [1204.5782](#). doi:[10.1103/PhysRevD.86.085012](#).
- [28] S. D. Silverstein and C. B. Duke. Theory of  $s - d$  scattering in dilute magnetic alloys. i. perturbation theory and the derivation of the low equation. *Phys. Rev.*, 161:456–469, Sep 1967. doi:[10.1103/PhysRev.161.456](#).
- [29] F. Tavecchio and G. Bonnoli. On the detectability of Lorentz invariance violation through anomalies in the multi-TeV  $\gamma$ -ray spectra of blazars. *Astron. Astrophys.*, 585:A25, 2016, [1510.00980](#). doi:[10.1051/0004-6361/201526071](#).
- [30] T. Terzić, D. Kerszberg, and J. Strišković. Probing Quantum Gravity with Imaging Atmospheric Cherenkov Telescopes. *Universe*, 7(9):345, 2021, [2109.09072](#). doi:[10.3390/universe7090345](#).
- [31] J. A. Wheeler. On the Nature of quantum geometrodynamics. *Annals Phys.*, 2:604–614, 1957. doi:[10.1016/0003-4916\(57\)90050-7](#).



# Popis slika

2.1	Feynmanovi dijagrami $s$ i $t$ -kanala za foton–foton raspršenje u najnižem redu. Vremenska os je usmjerena prema desno. Slika preuzeta iz [27] . . . . .	18
2.2	Udarni presjek za foton–foton raspršenje uz $n = 1$ modifikaciju disperzijske relacije. Rezultati su prikazani za EBL foton energije 11 meV kao fukcija energije gama-zrake pri raspršenju uz $\theta' = \pi$ . ( <b>Gore</b> ) Iscrtkana plava linija predstavlja udarni presjek u slučaju očuvane Lorentzove simetrije, pune linije predstavljaju superluminalni slučaj za različite vrijednosti $E_{QG,1}$ . ( <b>Dolje</b> ) Iscrtkana plava linija predstavlja Lorentz invarijantni slučaj, pune linije predstavljaju subluminalni slučaj za različite vrijednosti $E_{QG,1}$ . . . . .	26
2.3	Udarni presjek za foton–foton raspršenje uz $n = 2$ modifikaciju disperzijske relacije. Rezultati su prikazani za EBL foton energije 11 meV kao fukcija energije gama-zrake pri raspršenju uz $\theta' = \pi$ . ( <b>Gore</b> ) Iscrtkana plava linija predstavlja udarni presjek u slučaju očuvane Lorentzove simetrije, pune linije predstavljaju superluminalni slučaj za različite vrijednosti $E_{QG,2}$ . ( <b>Dolje</b> ) Iscrtkana plava linija predstavlja Lorentz invarijantni slučaj, pune linije predstavljaju subluminalni slučaj za različite vrijednosti $E_{QG,2}$ . . . . .	27
3.1	Feynmanovi dijagrami za foton–foton raspršenje za modificiranu teoriju u najnižem redu. Slika preuzeta iz [27] . . . . .	38
3.2	Udarni presjek za foton–foton raspršenje u aproksimaciji visokih energija modificirane teorije kvantne elektrodinamike. Rezultati su prikazani za EBL foton energije 11 meV kao fukcija energije gama-zrake pri raspršenju uz $\theta' = \pi$ u subluminalnom slučaju. Iscrtkana plava linija predstavlja Lorentz invarijantni slučaj, pune linije predstavljaju subluminalni slučaj za različite vrijednosti $E_{QG,2}$ . . . . .	49
3.3	Udarni presjek za foton–foton raspršenje u aproksimaciji visokih energija modificirane teorije kvantne elektrodinamike. Rezultati su prikazani za EBL foton energije 11 meV kao fukcija energije gama-zrake pri raspršenju uz $\theta' = \pi$ u superluminalnom slučaju. Iscrtkana plava linija predstavlja Lorentz invarijantni slučaj, pune linije predstavljaju superluminalni slučaj za različite vrijednosti $E_{QG,2}$ . . . . .	50
3.4	Usporedba standarnog udarnog presjeka i modificiranog udarnog presjeka u Lorentz invarijantnom limesu $M \rightarrow \infty$ . . . . .	51

- 3.5 Udarni presjek foton–foton raspršenja u modificiranoj teoriji kvantne elektrodinamike za EBL foton energije 11 meV kao funkcija energije gama-zrake pri raspršenju uz  $\theta' = \pi$ . (**Gore**) Iscrtkana plava linija predstavlja udarni presjek u slučaju očuvane Lorentzove simetrije, pune linije predstavljaju subluminarni slučaj za različite vrijednosti  $E_{QG,2}$ . (**Dolje**) Iscrtkana plava linija predstavlja udarni presjek u slučaju očuvane Lorentzove simetrije, pune linije predstavljaju superluminarni slučaj za različite vrijednosti  $E_{QG,2}$ . . . . . 64
- 3.6 Omjer udarnih presjeka  $\sigma_{TOT}$  i  $\sigma$  foton–foton raspršenja kao funkcija energije gama-zrake. Prikazan je omjer udarnih presjeka za subluminarni slučaj pri raspršenju uz  $\theta' = \pi$ ,  $E_{QG,2} = 50 \times 10^{-6} E_{PL}$  za energiju EBL fotona od 11 meV. . . . . 65

# Popis tablica

2.1	Pozicije maksimuma za različite vrijednosti $E_{QG}$ uz uzimanje prvog ili drugog člana reda modificirane disperzijske relacije za superluminalni $S = 1$ i subluminalni $S = -1$ slučaj. Energije su izražene u TeV. LI predstavlja udarni presjek u slučaju očuvane Lorentzove simetrije. . . . .	28
2.2	Pozicije prvog praga reakcije za različite vrijednosti $E_{QG}$ uz uzimanje prvog ili drugog člana reda modificirane disperzijske relacije za superluminalni $S = 1$ i subluminalni $S = -1$ slučaj. . . . .	28
2.3	Pozicije drugog praga reakcije za različite vrijednosti $E_{QG}$ uz uzimanje prvog ili drugog člana reda modificirane disperzijske relacije za superluminalni $S = 1$ i subluminalni $S = -1$ slučaj. . . . .	28