Skrivene simetrije u Keplerovom problemu

Pavun, Filip

SVEUČILIŠTE U RIJECI
FAKULTET ZA FIZIKU

Studijski program Fizika

Filip Pavun

SKRIVENE SIMETRIJE U KEPLEROVOM PROBLEMU

Završna preddiplomska radnja

Mentor: Mateo Paulišić, mag. phys.

Rijeka, 7.9.2022.

Sadržaj

1 Sažetak **2**

2 Uvod **3**

2.1 Liejeve algebre 3

2.1.1 Mnogostrukost 3

2.1.2 Liejeva grupa 3

2.1.3 Liejeva algebra 4

2.2 Klasična mehanika 4

2.2.1 Poissonove zagrade 4

2.2.2 Poissonove zagrade i Liejeve algebre 6

3 Laplace-Runge-Lenz vektor **7**

3.1 Dokaz očuvanja Laplace-Runge-Lenz(LRL) vektora za gravitacijski potencijal 7

3.2 Svojstva LRL vektora 9

3.3 Poopćenje LRL vektora 9

4 Simetrija LRL vektora **10**

4.1 Poissonove zagrade očuvanih veličina 10

4.2 Objašnjenje dobivenih struktura u Keplerovom problemu 15

4.2.1 Eliptične orbite 15

4.2.2 Generiranje zatvorenih orbita za proizvoljni kut rotacije 21

4.2.3 Hiperbolne orbite 24

5 Zaključak **25**

1 Sažetak

U Keplerovom problemu, dobro poznate očuvane veličine su energija i angularni moment. U ovom radu je pokazano da postoji još jedna očuvana veličina koju zovemo Laplace-Runge-Lenz vektor. Poissonove zgrade između komponenata angularnog momenta i LRL vektora tvore Liejevu algebru koja ovisi o energiji sustava. Proučen je slučaj kad je Hamiltonijan, odnosno energija $H < 0$, što odgovara zatvorenim eliptičnim orbitama sa simetrijom $SO(4)$ i slučaj kad je $H > 0$ što odgovara hiperbolnim orbitama sa simetrijom $SO(3,1)$. Posebna pozornost posvećena je eliptičnim orbitama te je pokazano da se može definirati četvero-vektor brzine, za kojeg se ispostavlja da se giba po velikim kružnicama hipersfere u prostoru brzina. Definiciju četvero-vektora brzine nam omogućuje reparametrizacija jednadžbe gibanja i jednadžbe za energiju prvenstveno sljedeći [5]. Jednadžba za ukupnu energiju sustava posjeduje simetriju generiranu elementima grupe $SO(4)$. Djelovanjem elementom iz grupe $SO(4)$ na četvero-vektor brzine dobivamo orbite različitih ekscentriciteta ali istih energija. Generirana je familija takvih orbita i pronađene su infinitezimalne transformacije pod djelovanjem elementa grupe $SO(4)$.

2 Uvod

2.1 Liejeve algebre

2.1.1 Mnogostrukost

Skup točaka M definiramo kao mnogostrukost ako svaka točka T iz M ima otvorenu okolinu oko T koja je sadržana u M i za koju postoji kontinuirano injektivno preslikavanje na otvoren skup $\mathbb{R}^n$ [11]. Izrečeno jezikom fizičara, mnogostrukost je svaki skup koji lokalno izgleda kao $\mathbb{R}^n$.

2.1.2 Liejeva grupa

Grupa je skup elemenata G koji zajedno s binarnom operacijom $\cdot$ zadovoljava [6, 11]:

1)Asocijativnost:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

2)Desni identitet:

$$x \cdot e = x$$

3)Desni inverz:

$$x \cdot x^{-1} = e$$

Dodatno kažemo da je grupa Abelova ako vrijedi:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Liejeva grupa posjeduje još i dodatnu strukturu, ona je ujedno i diferencijabilna mnogostrukost klase C^∞ [11]. Odnosno, grupa čiji elementi tvore glatku mnogostrukost. Primjer Liejeve grupe je grupa matrica oblika

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in <0, 2\pi]$$

sa standardnim matričnim množenjem. Takve su matrice rotacije u 2D prostoru i tu grupu zovemo $\mathbf{SO}(2)$ (eng. *special ortogonal of order two*). To je grupa svih ortogonalnih matrica A reda dva sa svojstvom $det(A) = 1$. Diferencijabilna mnogostrukost koju tvore elementi ove grupe je jedinična kružnica.

2.1.3 Liejeva algebra

Liejeva algebra je vektorski prostor $\mathfrak{g}$ na nekom polju F zajedno s binarnom operacijom $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ koja se zove Liejeva zagrada i koja zadovoljava sljedeće aksiome [10]:

Bilinearnost,

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$$
$$[z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y]$$

za sve skalare a, b u F i sve elemente x, y, z u $\mathfrak{g}$

Alternativnost,

$$[x, x] = 0$$

za svaki x u $\mathfrak{g}$.

Jacobijev identitet,

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

za sve x, y, z u $\mathfrak{g}$.

Korištenjem svojstva bilinearnosti i svojstva alternativnosti dobiva se sljedeći rezultat:

$$\begin{aligned}[x + y, x + y] &= [x, x + y] + [y, x + y] = \\ &= [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] \\ &= [x, y] + [y, x] = 0\end{aligned}$$

Odnosno svojstvo antikomutativnosti Liejevih zagrada.

$$[x, y] = -[y, x] \tag{2.1}$$

Postoji veza između Liejevh algebri i Liejevih grupa. Liejev treći teorem kaže da je svaka realna, konačna Liejeva algebra Lijeva algebra neke Liejeve grupe [9] . Za svaku Liejevu grupu možemo pronaći elemente Liejeve algebre koje zovemo generatorima. Eksponencijalnim preslikavanjem generatora algebre dobivamo elemente grupe [7] .

2.2 Klasična mehanika

2.2.1 Poissonove zagrade

U klasičnoj mehanici u kanonskom formalizmu svaka funkcija f koja opisuje neko gibanje, funkcija je od generaliziranih koordinata q i generaliziranih impulsa p i eventualno vremena t, $f(q, p; t)$ [8] . Totalni diferencijal funkcije f je

$$df = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

Dijeljenjem sa dt dobivamo

$$\frac{df}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Korištenjem Hamiltonovih kanonskih jednadžbi gornji izraz se zapisuje kao

$$\frac{df}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{2.2}$$

odnosno

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{2.3}$$

gdje je

$$\{f, g\} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial g_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \tag{2.4}$$

Poissonova zagrada.

Iz izraza (2.3) vidljivo je da ako funkcija f ne ovisi eksplicitno o vremenu, i ako je njezina Poissonova zagrada s Hamiltonijanom jednaka nuli, tada je funkcija f očuvana u vremenu. Nadalje, lako je vidjeti sljedeće rezultate fundamentalnih Poissonovih zagrada:

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} &= 0 \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \\ \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Može se pokazati da su Poissonove zagrade invarijantne na kanonske transformacije,
, na transformacije generaliziranih koordinata i impulsa koje ostavljaju Hamiltonove kanonske jednadžbe nepromijenjenima [8] . Evolucija sistema u faznom prostoru određena je Poissonovim zagradama na način:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\}. \end{aligned}$$

Ako funkcija f ne ovisi eksplicitno o vremenu tada Poissonova zagrada $\{f, H\}$ predstavlja promjenu funkcije f u vremenu t, što je upravo vremenska derivacija $\dot{f}$. Hamiltonijan je generator vremenske evolucije sistema!

2.2.2 Poissonove zagrade i Liejeve algebre

Za Poissonove zagrade vrijede sljedeća svojstva [8] :

$$\begin{aligned}
&\{f,g\} = -\{g,f\} \\
&\{af+bg,h\} = a\{f,h\} + b\{g,h\} \\
&\{f,f\} = 0 \\
&\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0
\end{aligned}$$

To su upravo svojstva koja definiraju Liejevu zagradu. Poissonova zagrada je derivacija u asocijativnoj algebri funkcija nad faznim prostorom [10] te se korištenjem Poissonovih zagrada može definirati Liejeva algebra nad funkcijama faznog prostora.

3 Laplace-Runge-Lenz vektor

Keplerov problem je specijalni slučaj centralnih potencijala u kojem sila pada s udaljenošću kao $1/r^2$. Dobro znane veličine koje su očuvane za sve centralne potencijale su energija i angularni moment, no osim toga, za problem sile oblika $1/r^2$, postoji još jedna očuvana veličina, takozvani Laplace-Runge-Lenz vektor ili skraćeno LRL vektor. Hamiltonijan problema razmatranog u ovom radu je Hamiltonijan čestice u gravitacijskom potencijalu.

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

U ovom poglavlju najprije je pokazano da je LRL vektor očuvan, direktnim dokazom. Moguć je i pristup putem primjene Noetherinog teorema u kanonskom ili Lagranžijanskom formalizmu [3] . Zatim su izvedena su osnovna svojstva LRL vektora te je raspravljena njegova generalizacija na ostale potencijale.

3.1 Dokaz očuvanja Laplace-Runge-Lenz(LRL) vektora za gravitacijski potencijal

U Newtonovoj mehanici, sila $\mathbf{F}$ se može izraziti kao vremenska derivacija linearnog impulsa, a za centralne sile također vrijedi [4]

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = f(r)\hat{\mathbf{r}},$$

gdje je $f(r)$ skalarna funkcija koja ovisi o udaljenosti r između dva tijela.

Deriviranjem po vremenu dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{L} = \frac{f(r)}{r}\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \\
&= m\frac{f(r)}{r}\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) \\
&= m\frac{f(r)}{r}\left[\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] \\
&= m\frac{f(r)}{r}\left[\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) \cdot \mathbf{r} - r^2\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right].
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Izraz u zagradi zapisujemo na način

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = r\frac{dr}{dt}, \tag{3.6}$$

gdje je $r = ||\mathbf{r}||$.

Uvrštavanjem izraza (3.6) u jednadžbu (3.5) dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) &= m\frac{f(r)}{r}\left[r\frac{dr}{dt}\cdot\mathbf{r} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] \\ &= mf(r)\left[\frac{dr}{dt}\mathbf{r}.r\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] \\ &= -mf(r)r^2\left[\frac{1}{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\mathbf{r}\right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

Izraz u zagradi se može napisati na način:

$$\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{d}{dt}\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\mathbf{r}. \tag{3.8}$$

Koristeći izraz (3.8), jednadžba (3.7) postaje

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = -mf(r)r^2\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}. \tag{3.9}$$

Jednadžba (3.9) je općenita i nastavak nije moguć ako se ne specificira $f(r)$. Za gravitacijski potencijal funkcija $f(r)$ je

$$f(r) = -\frac{k}{r^2},$$

što nam omogućuje poništavanje r^2 i daje nam očuvanu veličinu na način.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) &= \frac{d}{dt}(mk\hat{\mathbf{r}}) \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}}) &= 0 \end{aligned}$$

Veličina u zagradi je očuvana i nazivamo ju Laplace-Runge-Lenz vektor.

$$\mathbf{A} = \mathbf{p}\times\mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}} \tag{3.10}$$

Za nju vrijedi

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0.$$

Time je pokazano da je LRL vektor očuvan u Keplerovom problemu.

3.2 Svojstva LRL vektora

Iz same definicije LRL vektora odmah je vidljivo

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0, \tag{3.11}$$

jer je $\mathbf{L}$ okomit na $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$ zbog svojstva vektorskog produkta i na $\hat{\mathbf{r}}$ zbog definicije $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Ako LRL vektor skalarno pomnožimo sa $\mathbf{r}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar\cos\theta &= (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} - mk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} \\ &= \mathbf{L}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - mkr \\ &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} - mkr = l^2 - mkr\end{aligned}$$

Sada slijedi:

$$\begin{aligned}&Ar\cos\theta = l^2 - mkr \\ &Ar\cos\theta + mkr = l^2 \\ &r(A\cos\theta + mk) = l^2 \\ &\frac{1}{r} = \frac{1}{l^2}(mk + A\cos\theta)\end{aligned}$$

Usporedbom s jednadžbom orbite u polarnom obliku,

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(1 + e\cos\theta)$$

iznos vektora $\mathbf{A}$ se može zapisati kao

$$A = mke \tag{3.12}$$

Moguća interpretacija vektora $\mathbf{A}$ je da nam njegov iznos uz parametre m i k daje ekscentricitet orbite. Nadalje, ako se iskoristi definicija ekscentriciteta

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}},$$

kvadriranjem i uvrštavanjem u jednadžbu (3.12) dobivamo vezu između iznosa vektora $\mathbf{A}$ i energije E.

$$A^2 = m^2k^2 + 2mEl^2 \tag{3.13}$$

3.3 Poopćenje LRL vektora

Do sada su svi izvodi vrijedili samo za Keplerov potencijal. Pitamo se što je s ostalim potencijalima. Bertrandov teorem kaže da su zatvorene orbite moguće samo u dva slučaja, kada sila o udaljenosti ovisi o $1/r^2$ i kao r [4]. To jest, zatvorene orbite moguće su samo u slučaju Keplerovog problema i harmonijskog oscilatora. U slučaju harmonijskog oscilatora očuvani analogon LRL vektora nije vektor već tenzor drugog ranga A_{ij}. Ostali potencijali nemaju zatvorenu orbitu, što znači da za neki kut θ čestica ima više mogućih položaja pa $r(\theta)$ nije jednoznačna funkcija. Vektor $r(\theta)$ poprima beskonačno mnogo vrijednosti za dani kut θ, stoga je vrlo teško naći opću definiciju LRL vektora.

4 Simetrija LRL vektora

Prema Noetherinom teoremu, postoji veza između simetrija sustava i očuvanih veličina. Simetrije u klasičnoj nerelativističkoj mehanici konzervativnih sustava su one infinitezimalne transformacije koje ostavljaju Hamiltonijan invarijantnim, odnosno imaju iščezavajuću Poissonovu zagradu s Hamiltonijanom. Takve veličine su i očuvane u vremenu jer Poissonova zagrada s Hamiltonijanom vremenska derivacija takve veličine. Pomoću Poissonovih zagrada može se definirati Liejeva algebra nad funkcijama na faznom prostoru. Time je moguće definirati Liejevu algebru čiji vektorski prostor čine očuvane veličine, odnosno generatori infinitezimalnih transformacija. U nekim slučajevima, tako dobivena algebra ima geometrijsku interpretaciju. Zanima nas koju algebru tvore angularni moment i LRL vektor i postoji li geometrijska interpretacija dobivene algebre.

4.1 Poissonove zagrade očuvanih veličina

Poissonova zagrada između komponenti angularnog momenta je:

$$\begin{aligned}
\{L_i, L_j\} &= \{\epsilon_{mni} r_m p_n, \epsilon_{klj} r_k p_l\} \\
&= \epsilon_{mni}\epsilon_{klj}\{r_m p_n, r_k p_l\} \\
&= \epsilon_{mni}\epsilon_{klj}[\{r_m, r_k p_l\}p_n + \{p_n, r_k p_l\}r_m] \\
&= \epsilon_{mni}\epsilon_{klj}[\{r_m, r_k\}p_l p_n + \{r_m, p_l\}r_k p_n + \{p_n, r_k\}r_m p_l + \{p_n, p_l\}r_k r_m] \\
&= \epsilon_{mni}\epsilon_{klj}[\delta_{ml} r_k p_n - \delta r_m p_l] \\
&= \epsilon_{lni}\epsilon_{klj} r_k p_n - \epsilon_{mki}\epsilon_{klj} r_m p_l \\
&= (\delta_{nj}\delta_{ik} - \delta_{nk}\delta_{ij}) r_k p_n - (\delta_{mj}\delta_{il} - \delta_{ml}\delta_{ij}) r_m p_l \\
&= r_i p_j - \delta_{ij} r_k p_k - r_j p_i + \delta ij r_l p_l \\
&= r_i p_j - r_j p_i = (\delta_{il}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) r_k p_l \\
&= \epsilon_{mij}\epsilon_{mkl} r_k p_l = \epsilon_{ijm}\epsilon_{klm} r_k p_l \\
&= \epsilon_{ijm} L_m
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Ovo je i dobro poznati rezultat i poznata struktura algebri rotacija. Poissonova zagrada između komponenti LRL vektora i angularnog momenta je:

$$\begin{aligned}
\{A_i, L_j\} &= \{\epsilon_{mni} p_n L_m -, k\hat{r}_i, \epsilon_{klj} r_k p_l\} \\
&= \epsilon_{mni}\epsilon_{klj}\{p_m L_n, r_k p_l\} - mk\epsilon_{klj}\{\hat{r}_i, r_k p_l\} \\
&= \epsilon_{mni}\epsilon_{klj}[\{p_m, r_k p_l\}L_n + \{L_n, r_k p_l\}p_m] - mk\epsilon_{klj}[\{\hat{r}_i, r_k\}p_l + \{\hat{r}_i\, p_l\}r_k] \\
&= \epsilon_{mni}\epsilon_{klj}[\{p_m, r_k\}p_l L_n + \{p_m, p_l\}r_k L_n + \{L_n, r_k\}p_l p_m + \{L_n, p_l\}r_k p_m] \\
&\quad - mk\epsilon_{klj}[\{\hat{r}_i, r_k\}p_l + \{\hat{r}_i, p_l\}r_k]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

gdje su preostale Poissonove zagrade:

$$
\begin{aligned}
\{p_m, r_k\} &= -\delta_{mk} \\
\{L_n, r_k\} &= \{\epsilon_{abn} r_a p_b, r_k\} = \epsilon_{abn}[\{r_a, r_k\}p_b + \{p_b, r_k\}r_a] \\
&= \epsilon_{abn}(-\delta_{bk}) r_a = \epsilon_{kan} r_a \\
\{L_n, p_l\} &= \epsilon_{abn}\{r_a p_b, p_l\} = \epsilon_{abn}[\{r_a, p_l\}p_b + \{p_b, p_l\}r_a] \\
&= \epsilon_{abn}\delta_{al} p_b = \epsilon_{lbn} p_b \\
\{\hat{r}_i, p_l\} &= \{\frac{r_i}{r} p_l\} = \{r_i, p_l\}\frac{1}{r} + \{\frac{1}{r} p_l\} r_i = \frac{\delta_{il}}{r} + r_i \sum_k \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r_k}\frac{\partial p_l}{\partial p_k} \\
&= \frac{\delta_{il}}{r} + r_i \sum_k \delta_{kl}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r_k} = \frac{\delta_{il}}{r} + r_i \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r_l} \\
&= \frac{\delta_{il}}{r} + r_i \frac{\partial (r_q^2)^{-1/2}}{\partial r_l} = \frac{\delta_{il}}{r} + r_i\left(-\frac{1}{2}(r_q^2)^{-3/2} 2 r_q \delta_{ql}\right) \\
&= \frac{\delta_{il}}{r} - \frac{r_i r_l}{r^3}
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem u izraz (4.15) dobiva se:

$$
\begin{aligned}
\{A_i, L_j\} &= \epsilon_{mni}\epsilon_{klj}[-\delta_{mk} p_l L_n + \epsilon_{kan} r_a p_l p_m + \epsilon_{lbn} p_b r_k p_m] - mk\epsilon_{klj}\frac{1}{r}\delta_{il} r_k + mk\epsilon_{klj}\frac{r_i r_l r_k}{r^3} \\
&= \epsilon_{mni}\epsilon_{mjl} p_l L_n + \epsilon_{mni}\epsilon_{klj}\epsilon_{kan} r_a p_l p_m + \epsilon_{mni}\epsilon_{ljk}\epsilon_{lbn} p_b r_k p_m] - mk\epsilon_{ijk}\hat{r}_k \\
&= (\delta_{nj}\delta_{il} - \delta_{nl}\delta_{ij}) p_l L_n + \epsilon_{mni}(\delta_{la}\delta_{jn} - \delta_{ln}\delta_{ja}) r_a p_l p_m + \epsilon_{mni}(\delta_{jb}\delta_{kn} - \delta_{nj}\delta_{kb}) p_b r_k p_m \\
&\quad - mk\epsilon_{ijk}\hat{r}_k \\
&= p_i L_j - \delta_{ij} p_l L_l + \epsilon_{mni}(\delta_{jn} r_l p_l p_m - r_j p_n p_m + p_j r_n p_m - \delta_{nj} p_k r_k p_m) - mk\epsilon_{ijk}\hat{r}_k \\
&= p_i L_j + \epsilon_{mni} r_j p_n p_m - \epsilon_{mni} p_j r_n p_m - -mk\epsilon_{ijk}\hat{r}_k \\
&= p_i L_j + \epsilon_{nmi} p_n p_m r_j + \epsilon_{nmi} r_n p_m p_j - mk\epsilon_{ijk}\hat{r}_k \\
&= p_i L_j - p_j L_i - mk\epsilon_{ijk}\hat{r}_k \\
&= \epsilon_{ijk} A_k
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Još preostaje pronaći Poissonovu zagradu između komponenti LRL vektora.

$$
\begin{aligned}
\{A_i, A_j\} &= \{\epsilon_{mni} p_m L_n - mk\frac{r_i}{r}, \epsilon_{klj} p_k L_l - mk\frac{r_j}{r}\} \\
&= \epsilon_{mni}\epsilon_{klj}\{p_m L_n, p_k L_l\} - mk\epsilon_{mni}\{p_m L_n, \frac{r_j}{r}\} - mk\epsilon_{klj}\{\frac{r_i}{r}, p_k L_l\} \\
&= \epsilon_{mni}\epsilon_{klj}\left(\{p_m, L_l\}L_n p_k + \{L_n, p_k\}L_l p_m + \{L_n, L_l\}p_m p_k\right) \\
&\quad - mk\epsilon_{mni}\left(\{p_m, \frac{r_j}{r}\}L_n + \{L_n, \frac{r_j}{r}\}p_m\right) - mk\epsilon_{klj}\left(\{\frac{r_i}{r}, p_k\}L_l + \{\frac{r_i}{r}, L_l\}p_k\right)
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Preostale zagrade su:

$$
\begin{aligned}
\{p_m, L_l\} &= \epsilon_{abl}\{p_m, r_a\}p_b = -\epsilon_{abl}\delta_{ma}p_b = -\epsilon_{mbl}p_b \\
\{L_n, p_k\} &= \epsilon_{cdn}\delta_{ck}p_d = \epsilon_{kdn}p_d \\
\{L_n, L_l\} &= \epsilon_{nlq}L_q \\
\{p_m, \frac{r_j}{r}\} &= \frac{r_m r_j}{r^3} - \frac{\delta_{mj}}{r} \\
\{L_n, \frac{r_j}{r}\} &= \epsilon_{cdn}\{p_d, \frac{r_j}{r}\}r_c = \epsilon_{cdn}\left(\frac{r_d r_j}{r^3} - \frac{\delta_{dj}}{r}\right) \\
&= \epsilon_{cdn}\frac{r_d r_j r_c}{r^3} - \epsilon_{cjn}\frac{r_c}{r} = -\epsilon_{cjn}\frac{r_c}{r} \\
\{\frac{r_i}{r}, p_k\} &= \frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{r_i r_k}{r^3} \\
\{\frac{r_i}{r}, L_l\} &= \epsilon_{abl}\{\frac{r_i}{r}, p_b\}r_a = \epsilon_{abl}\left(\frac{r_a r_i}{r^3} - \frac{\delta_{di}}{r}\right)r_a = \epsilon_{ail}\frac{r_a}{r}
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem izračunatih zagrada u izraz (4.17) dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\{A_i, A_j\} &= \epsilon_{mni}\epsilon_{klj}\epsilon_{mlb}p_b L - np_k + \epsilon_{nim}\epsilon_{klj}\epsilon_{nkd}p_d p_m L_l + \epsilon_{nim}\epsilon_{klj}\epsilon_{nlq}L_q p_m p_k - mk\epsilon_{mni} \\
&\quad \left(\frac{r_m r_j}{r^3} - \frac{\delta_{mj}}{r}\right) L_n + mk\epsilon_{nim}\epsilon_{ncj}\frac{r_c}{r}p_m - mk\epsilon_{klj}\left(\frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{r_i r_k}{r^3}\right) L_l \\
&\quad - mk\epsilon_{ljk}\epsilon_{lai}\frac{r_a}{r}p_m \\
&= \epsilon_{klj}(\delta_{nl}\delta_{ib} - \delta_{nb}\delta_{il})p_b L_n p_k + \epsilon_{klj}(\delta_{ik}\delta_{md} - \delta_{id}\delta_{mk})p_d p_m L_l \\
&\quad - \epsilon_{klj}(\delta_{il}\delta_{mq} - \delta_{iq}\delta_{ml})L_q p_m p_k - mk\epsilon_{mni}\frac{r_m r_j L_n}{r^3} + \frac{mk}{r}\epsilon_{jni}L_n \\
&\quad + \frac{mk}{r}(\delta_{ic}\delta_{mj} - \delta_{ij}\delta_{mc})r_c p_m - \frac{mk}{r}\epsilon_{ilj}L_l + mk\epsilon_{klj}\frac{r_i r_k L_l}{r^3} - \frac{mk}{r}(\delta_{ja}\delta_{ki} - \delta_{ij}\delta_{ka})r_a p_k \\
&= \epsilon_{knj}p_i L_n p_k + \epsilon_{ilj}p^2 L_l - \epsilon_{klj}p_i p_k L_l - \epsilon_{klj}L_i p_l p_k - mk\epsilon_{mni}\frac{r_m r_j L_n}{r^3} + \frac{mk}{r}\epsilon_{jni}L_n \\
&\quad + \frac{mk}{r}r_i p_j - \frac{mk}{r}\epsilon_{ilj}L_l + mk\epsilon_{klj}\frac{r_i r_k L_l}{r^3} - \frac{mk}{r}r_j p_i \\
&\quad - \epsilon_{ijl}p^2 L_l . mk\epsilon_{nim}\epsilon_{ncd}\frac{r_m r_j r_c p_d}{r^3} + 2\frac{mk}{r}\epsilon_{ijl}L_l + \frac{mk}{r}(r_i p_j - r_j p_i) + mk\epsilon_{ljk}\epsilon_{lab}\frac{r_i r_k r_a p_b}{r^3} \\
&= -\epsilon_{ijl}p^2 L_l + 3\frac{mk}{r}\epsilon_{ijl}L_l - mk(\delta_{ic}\delta_{md} - \delta_{id}\delta_{mc})\frac{r_m r_j r_c p_d}{r^3} + mk(\delta_{ja}\delta_{kb} - \delta_{jb}\delta_{ka})\frac{r_i r_k r_a p_b}{r^3} \\
&= -\epsilon_{ijl}p^2 L_l + 3\frac{mk}{r}\epsilon_{ijl}L_l + mk\frac{r^2 r_j p_i}{r^3} - mk\frac{r^2 r_i p_j}{r^3} \\
&= -\epsilon_{ijl}p^2 L_l + 3\frac{mk}{r}\epsilon_{ijl}L_l - \frac{mk}{r}(r_i p_j - r_j p_i) = -\epsilon_{ijl}p^2 L_l + 2\frac{mk}{r}\epsilon_{ijl}L_l \\
&= -2mH\epsilon_{ijl}L_l
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Na kraju su dobiveni sljedeći rezultati:

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}L_k \tag{4.19}$$
$$\{A_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}A_k \tag{4.20}$$
$$\{A_i, A_j\} = -2mH\epsilon_{ijk}L_k \tag{4.21}$$

Veličine unutar Poissonovih zagrada su zapravo generatori neke Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Da bi struktura algebre bila vidljivija, uvodimo sljedeće skaliranje vektora $\mathbf{A}$ [2]

$$\mathbf{D} = p_0\mathbf{A}, \qquad p_0 = \sqrt{2m|H|}.$$

Lako se vidi da Poissonove zagrade sa skaliranim vektorom $\mathbf{D}$ imaju oblik:

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}L_k \tag{4.22}$$
$$\{D_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}D_k \tag{4.23}$$
$$\{D_i, D_j\} = \pm\epsilon_{ijk}L_k \tag{4.24}$$

gdje je predznak pozitivan ako je Hamiltonijan $H < 0$, a negativan ako je Hamiltonijan $H > 0$. Moguć je i slučaj gdje je Hamiltonijan $H = 0$, tada je Poissonova zagrada (4.24) jednaka 0.

Ako je Hamiltonijan negativan, Poissonove zagrade očuvanih veličina su

$$\begin{aligned} \{L_i, L_j\} &= \epsilon_{ijk} L_k \\ \{D_i, L_j\} &= \epsilon_{ijk} D_k \\ \{D_i, D_j\} &= \epsilon_{ijk} L_k. \end{aligned}$$

Ovakva algebra izomorfna je Liejevoj algebri $\mathfrak{so}(4)$ [1]. Grupa s ovom algebrom je grupa $SO(4)$, to jest, grupa rotacija u 4D prostoru. Ova grupa je šesterodimenzionalna što je u skladu s očekivanjima zbog šest očuvanih veličina, tri komponente vektora $\mathbf{L}$ i tri komponente vektora $\mathbf{A}$.

Ako je Hamiltonijan pozitivan Poissonove zagrade očuvanih veličina su

$$\begin{aligned} \{L_i, L_j\} &= \epsilon_{ijk} L_k \\ \{D_i, L_j\} &= \epsilon_{ijk} D_k \\ \{D_i, D_j\} &= -\epsilon_{ijk} L_k, \end{aligned}$$

što čini algebru koja je izomorfna algebri $\mathfrak{so}(3,1)$ [1], to jest, algebra grupe SO(3,1) koja se još naziva i Lorentzova grupa. To je grupa svih transformacija koje čuvaju metriku: $ds^2 = dx^2 - dy^2 - dz^2 - dw^2$. Ova grupa je također šesterodimenzionalna, što je opet u skladu sa očekivanjem.

4.2 Objašnjenje dobivenih struktura u Keplerovom problemu

U ovom poglavlju je interpretirana struktura dobivena Poissonovim zagradama očuvanih veličina. Pronađena je grupa simetrija za eliptične ($SO(4)$) i hiperbolne orbite ($SO(3,1)$), a za slučaj eliptičnih putanja eksplicitno su generirane orbite dobivene transformacijama pomoću elemenata grupe $SO(4)$.

Jednadžba gibanja za česticu u centralnom potencijalu je

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -k\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \tag{4.25}$$

a ukupna energija je

$$\frac{m}{2}\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^2 - \frac{k}{r} = E. \tag{4.26}$$

4.2.1 Eliptične orbite

Promatranjem Keplerovog problema u prostor-vremenu i promjenom parametrizacije, definira se koordinata t'. Zapisom jednadžbe gibanja i jednadžbe za energiju u novoj parametrizaciji dobiva se nova jednadžba gibanja, a jednadžba za energiju prelazi u jednadžbu 4D sfere iz koje je vidljivo da su četvero-brzina i energija invarijantne na djelovanje grupe $SO(4)$. Promotrena je infinitezimalna rotacija četvero-vektora brzine i njezin utjecaj na brzinu u 3D prostoru. Generirano je djelovanje grupe $SO(4)$ na proizvoljnu zatvorenu orbitu za proizvoljni kut rotacije.

Kada su putanje elipse, energija je negativna ($E < 0$). Definiramo karakterističnu brzinu V, karakteristični radijus R i karakteristično vrijeme T, na način [5]:

$$V = \sqrt{-\frac{2E}{m}} \tag{4.27}$$

$$R = -\frac{k}{2E} \tag{4.28}$$

$$T = \frac{R}{V} = -k\sqrt{-\frac{m}{8E^3}} \tag{4.29}$$

Promatranjem Keplerovog problema u prostor-vremenu, prelazimo s parametra t na parametar λ uz uvjet $t' = r/V$ gdje crtica označava derivaciju po novom parametru λ. Jednadžbe (4.25) i (4.26) se parametriziraju po parametru λ umjesto standardnog parametra t [5]. Derivacija po parametru λ je $t' = dt/d\lambda$, $r' = dr/d\lambda$.

Sada je cilj napisati jednadžbu gibanja i jednadžbu energije pomoću nove parametrizacije. Operator derivacije d/dt postaje

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}\frac{d}{d\lambda} = \frac{1}{t'}\frac{d}{d\lambda}. \tag{4.30}$$

Jednadžba energije može se zapisati

$$\begin{aligned}
&E = \frac{m}{2}\left|\frac{\mathbf{r}'}{t'}\right|^2 - \frac{k}{r} \\
&E = \frac{m}{2}\frac{(r')^2}{(t')^2} - \frac{k}{Vt'} \\
&(r')^2 - \frac{2kt'}{mV} - \frac{2E}{m}(t')^2 = 0 \\
&(r')^2 - 2VRt' + V^2(t')^2 = 0 \\
&(r')^2 - 2V^2Tt' + V^2T^2 - R^2 + V^2(t')^2 = 0.
\end{aligned}$$

Na kraju, jednadžba za energiju postaje

$$(r')^2 + V^2(t' - T)^2 = R^2. \tag{4.31}$$

To je upravo jednadžba 4D hipersfere s centrom na koordinatama (t’,x’,y’,z’)=(T,0,0,0) [5] . Također se može primijetiti da diferenciranje parametrom λ nije promijenilo mjernu jedinicu veličina r i t, stoga slijedi da λ mora biti bezdimenzionalana veličina.

Jednadžba gibanja u novoj parametrizaciji je

$$\begin{aligned}
&m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -k\frac{\mathbf{r}}{r^3}\\
&m\frac{\mathbf{r}''t' - t''\mathbf{r}'}{(t')^3} = -k\frac{\mathbf{r}}{r^3}\\
&mV^2\frac{\mathbf{r}''r - \mathbf{r}'r'}{r^3} = -k\frac{\mathbf{r}}{r^3}\\
&\mathbf{r}'' = \frac{\mathbf{r}'r'}{r} - R\frac{\mathbf{r}}{r}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Derivacija iznosa vektora $\mathbf{r}$ je

$$r' = \frac{d}{d\lambda}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{-1/2}\left(\frac{2d\mathbf{r}}{d\lambda}\mathbf{r}\right) = \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}}{r}.$$

A druga derivacija je

$$r'' = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{\mathbf{r}''\mathbf{r}r + \mathbf{r}'\mathbf{r}'r - r'\mathbf{r}'\mathbf{r}}{r^2}. \tag{4.33}$$

Uvrštavanjem (4.32) u (4.33) dobivamo izraz za iznos radijalne komponente.

$$\begin{aligned}
r'' &= \frac{\left(\frac{\mathbf{r}'r'}{r} - R\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\mathbf{r}r' + \mathbf{r}'\mathbf{r}'r - r'\mathbf{r}'\mathbf{r}}{r^2}\\
&= \frac{\mathbf{r}'\mathbf{r}r' - R\mathbf{r}\mathbf{r} + \mathbf{r}'\mathbf{r}'r - r'\mathbf{r}'\mathbf{r}}{r^2}
\end{aligned}$$

Nakon sređivanja izraza dobiva se

$$r'' = -R + \frac{\mathbf{r}'\mathbf{r}'}{r}, \tag{4.34}$$

što se koristeći izraz za energiju (4.23) može zapisati kao

$$\begin{aligned}
r'' &= -R + \frac{R^2 - V^2(t'-T)^2}{r}\\
&= -R + \frac{R^2}{r} - \frac{V^2}{r}\frac{r^2}{V^2} + \frac{2}{r}\frac{rR}{V^2}v^2 - \frac{V^2}{r}\frac{R^2}{V^2}.
\end{aligned}$$

Skraćivanjem članova dobiva se

$$r'' = -r + R, \tag{4.35}$$

što je pomoću uvjeta $t' = r/V$, ekvivalentno jednadžbi

$$t''' = -t' + T. \tag{4.36}$$

Sada se može dobiti jednadžba za $\mathbf{r}'''$ u vektorskom obliku. Počevši od jednadžbe (4.32) i njenim diferenciranjem, dobiva se:

$$\mathbf{r}''' = \frac{\mathbf{r}''r'r + \mathbf{r}'r''r - \mathbf{r}r'r' - R\mathbf{r}'r + R\mathbf{r}r'}{r^2} \tag{4.37}$$

Uvrštavanjem izraza (4.32) i (4.35) u (4.37) dobiva se

$$\mathbf{r}''' = \frac{\mathbf{r}'r'r' - Rr'\mathbf{r} - \mathbf{r}'r^2 + \mathbf{r}'rR - \mathbf{r}r'r' - R\mathbf{r}'r + R\mathbf{r}r'}{r^2}$$

Naposljetku preostaje

$$\mathbf{r}''' = -\mathbf{r}'. \tag{4.38}$$

Korištena je relativistička notacija, gdje je v^μ četvero-vektor brzine, v^μ njegov dualni vektor, gdje kada pišemo v^μ mislimo na objekt, a ne na njegove komponente. Konačno, neka je $v^\mu = V(t' - T)\mathbf{e}_t + \mathbf{r}'$ tada se jednadžbe (4.36), (4.38) i jednadžba za energiju (4.31) mogu izraziti kao [5] :

$$\frac{d^2v^\mu}{d\lambda^2} = -v^\mu \tag{4.39}$$

$$\sqrt{v^\mu v_\mu} = R. \tag{4.40}$$

Jednadžbe (4.39) je kovarijantna, a jednadžba (4.40) invarijantna pod djelovanjem elemenata grupe SO(4). Vektor brzine v^μ opisuje veliku kružnicu na hipersferi s radijusom R. Velike kružnice na sferi su zapravo gedezici pa se može reći da se vektor v^μ giba po geodeziku sfere [12] u prostoru brzina. Jednadžba (4.38) se može riješiti, pa je uz općenite konstante integracije njeno rješenje

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\cos(\lambda) + \mathbf{B}\sin(\lambda) + \mathbf{C}, \tag{4.41}$$

gdje su $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ konstantni vektori. Jednadžba (4.41) je jednadžba elipse, što dovodi do zaključka da se u 3D prostoru čestice gibaju po elipsama. Rješenja Keplerovog problema su elipse s fokusom u središtu, pa je vektor $\mathbf{C}$ vektor iz ishodišta elipse do fokusa. Vektori $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ predstavljaju veliku i malu os te određuju položaj elipse oko ishodišta koordinatnog sustava.

Želimo pokazati kakav efekt imaju rotacije četvero-vektora brzine po hipersferi na putanje u realnom prostoru. Korištena je komponentna notacija vektora. Četvero-vektor brzine je

$$v^{\mu} = \begin{pmatrix} V(t'-T) \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{4.42}$$

Matrice rotacije u 4D prostoru su

$$R_{t'x'} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{x'y'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{t'y'} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{x'z'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_{t'z'} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad R_{y'z'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

gdje indeksi označavaju ravninu rotacije. Djelovanjem matrice $R_{t'x'}$ na vektor brzine v^{μ} dobiva se novi vektor $\tilde{v}^{\mu}$.

$$\tilde{v}^{\mu} = R^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu} = \begin{pmatrix} cos(\theta)V(t'-T) - sin(\theta)x' \\ sin(\theta)V(t'-T) + cos(\theta)x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

Razvojem jednadžbe (4.43) u red i zadržavanjem na linearnom članu dobiva se

$$\tilde{v}^{\mu} = v^{\mu} + \theta \begin{pmatrix} -x' \\ V(t'-T) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.44}$$

Projekcijom u 3D prostor mijenja se samo x komponenta vektora v^{μ}, ostale komponente su nepromijenjene. Nova brzina u x-smjeru je

$$
\begin{aligned}
&\tilde{x}' = x + \theta V(t' - T) \\
&\frac{d\tilde{x}}{dt}\frac{dt}{d\lambda} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\lambda} + \theta V(t' - T) \\
&\frac{\tilde{x}}{dt}t' = \frac{dx}{dt}t' + \theta V(t' - T) \\
&\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} + \theta V\left(1 - \frac{T}{t'}\right)
\end{aligned}
$$

Uz dodatan uvjet da je $t' = r/V$ i pomoću jednadžbe (4.29) slijedi:

$$
\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} + \theta V\left(1 - \frac{R}{r}\right) \tag{4.45}
$$

Koristeći definiciju karakterističnog radijusa R jednadžba (4.45) postaje:

$$
\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} + \theta V\left(1 + \frac{k}{2Er}\right) \tag{4.46}
$$

Izraz u zagradi veći je od 1 iz čega slijedi

$$
\frac{d\tilde{x}}{dt} > \frac{dx}{dt}. \tag{4.47}
$$

Djelovanjem matrice rotacije $R_{t'x'}$ povećali smo brzinu čestice u x smjeru, a time se orbita razvukla u x smjeru, odnosno promijenjen je ekscentricitet. Energija je očuvana pod $SO(4)$ transformacijama pa mora vrijediti da orbita dobivena takvom transformacijom ima istu energiju kao i početna orbita. Djelovanjem elementima grupe SO(4) na prostoru četverobrzina tako možemo dobiti izraze za nove orbite koje su istih energija. Ako rotacija ostavlja vremensku komponentu fiksnom, rotacija se događa samo u prostornim dimenzijama. Nove će orbite tada biti samo zarotirane oko ishodišta, a istog ekscentriciteta. Taj je postupak ekvivalentan djelovanju elemenata grupe $SO(3)$ na orbite čestica. Da smo razmatranje očuvanih veličina ograničili na angularni moment, upravo bismo i dobili algebru $\mathfrak{so}(3)$. Angularni moment je generator rotacija orbita, a takve transformacije opet daju orbite s istim energijama.

4.2.2 Generiranje zatvorenih orbita za proizvoljni kut rotacije

Rotacija za proizvoljni kut dobiva se integriranjem vektora četvero-brzine $\tilde{v}^\mu$, gdje se član $(t' - T)$ može zapisati kao $-t'''$ pomoću jednadžbe (4.36). Dobiveni vektor je četvero-vektor položaja

$$\tilde{x}^\mu = \begin{pmatrix} -V\cos(\theta)t'' + K - \sin(\theta)x + J \\ -V\sin(\theta)t'' + \cos(\theta)x + J \\ y + M \\ z + N \end{pmatrix}, \tag{4.48}$$

gdje su K, J, M i N konstante integracije. Konstante J, M i N su zapravo komponente vektora $\mathbf{C}$ koji se u rješenju jednadžbe (4.38) pojavljuje kao konstantni vektor. Rješenja jednadžbi (4.36) i (4.38) su:

$$t = A\cos(\lambda) + B\sin(\lambda) + \lambda T + C \tag{4.49}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\cos(\lambda) + \mathbf{B}\sin(\lambda) + \mathbf{C}. \tag{4.50}$$

Iz jednadžbe (4.49) slijedi da je

$$t' = -A\sin(\lambda) + B\cos(\lambda) + T, \tag{4.51}$$

a

$$t'' = -A\cos(\lambda) - B\sin(\lambda). \tag{4.52}$$

Postavljanjem sljedećih početni uvjeta na vektor $\mathbf{r}$

$$\mathbf{A} = a\hat{i},\ \mathbf{B} = b\hat{j},\ \mathbf{C} = c\hat{i}' + d\hat{j},$$

vektor $\mathbf{r}$ se može zapisati kao

$$\mathbf{r} = (a\cos(\lambda) + c,\ b\sin(\lambda) + d,\ 0). \tag{4.53}$$

Koristeći (4.52), (4.41) i zadane početne uvjete, vektor $\tilde{\mathbf{r}}$ se može zapisati kao

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} V\sin(\theta)(A\cos(\lambda) + B\sin(\lambda)) + K\sin(\theta) + \cos(\theta)(a\cos(\lambda) + c) \\ b\sin(\lambda) + d \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.54}$$

Iz uvjeta $t' = r/V$ proizlazi veza između konstanti A, B i a, b, c, d.

$$\begin{aligned} &(-A\sin(\lambda) + B\cos(\lambda) + T)^2 = \frac{1}{V^2}[(a\cos(\lambda) + c)^2 + (b\sin(\lambda) + d)^2] \\ &A^2\sin^2(x) - 2AB\sin(x)\cos(x) - 2AT\sin(x) + B^2\cos^2(x) + 2BT\cos(x) + T^2 \\ &\quad = \frac{1}{V^2}\left(a^2\cos^2(x) + 2ac\cos(x) + b^2\sin^2(x) + 2bd\sin(x) + c^2 + d^2\right) \end{aligned}$$

Usporedbom članova dobivene su sljedeće veze između konstanti:

$$T^2 = \frac{c^2 + d^2}{v^2}, \quad BT = \frac{ac}{V^2} \quad B^2 = \frac{a^2}{V^2},$$
$$-AT = \frac{bd}{v^2}, \quad A^2 = \frac{b^2}{V^2}.$$

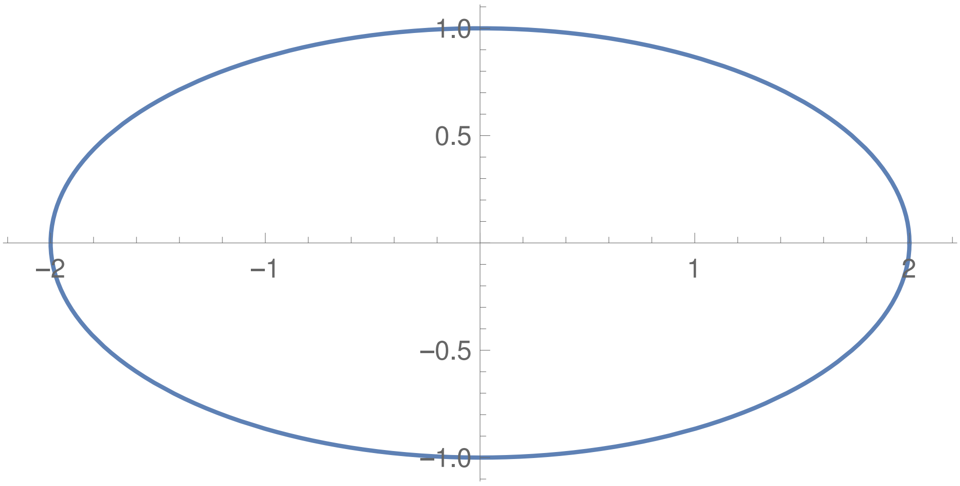
Iz toga slijedi

$$A = \frac{b}{V}, \quad B = \frac{a}{V}, \quad T = \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{V} \tag{4.55}$$

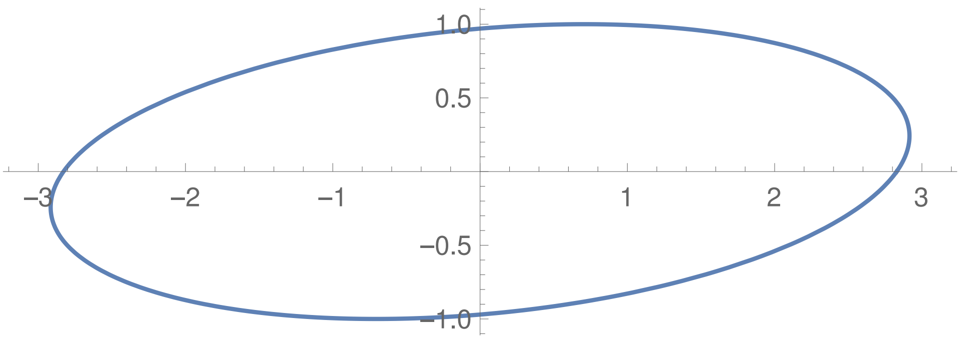
Uz pomoć dobivenih veza vektor $\tilde{\mathbf{r}}$ postaje

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)(b\cos(\lambda) + a\sin(\lambda) + K) + \cos(\theta)(a\cos(\lambda) + c) \\ b\sin(\lambda) + d \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.56}$$

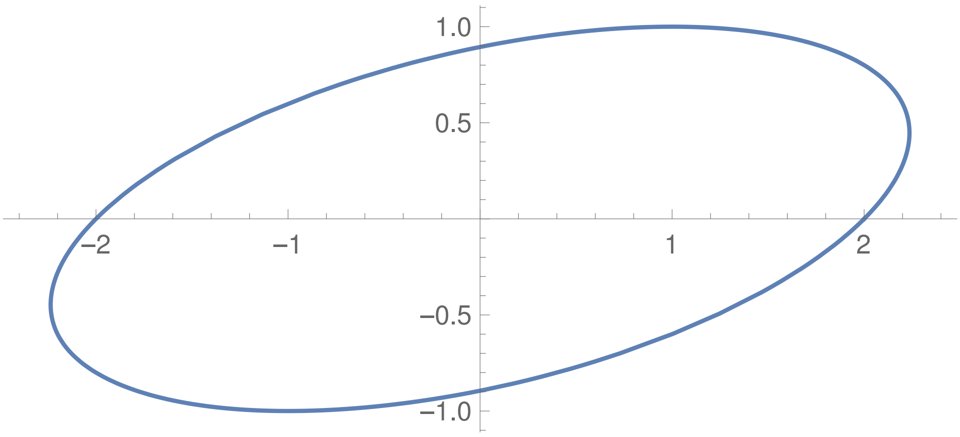
Jednadžba (4.56) je jednadžba orbita rotiranih elementom grupe $SO(4)$. Za izbor $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 0$, $K = 0$ dobivene su orbite prikazane na slikama.



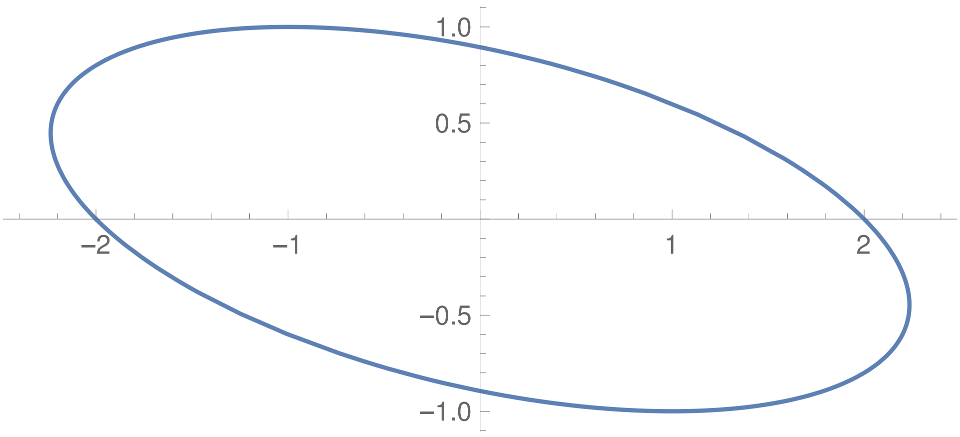
Slika 1: Orbita čestice nakon rotacije četvero-vektora brzine u $t'x'$ ravnini za kut $\theta = 0$.



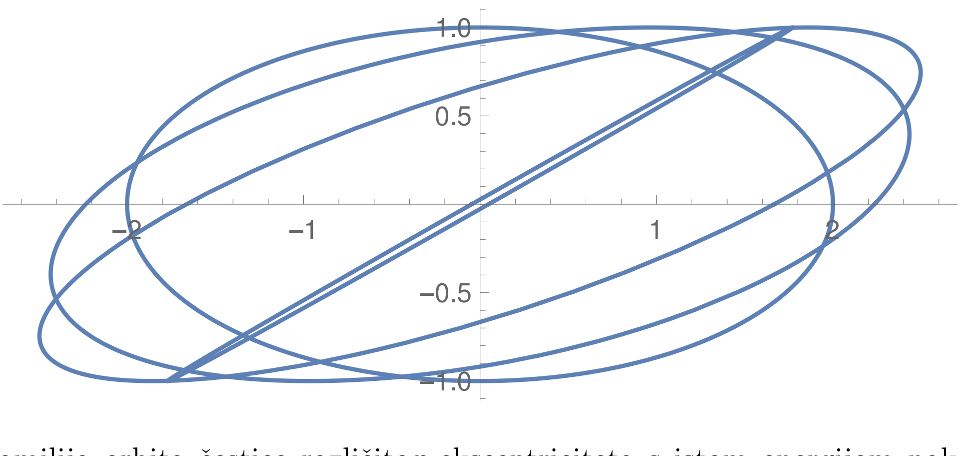
Slika 2: Orbita čestice nakon rotacije četvero-vektora brzine u $t'x'$ ravnini za kut $\theta = \frac{\pi}{4}$.



Slika 3: Orbita čestice nakon rotacije četvero-vektora brzine u $t'x'$ ravnini za kut $\theta = \frac{\pi}{2}$.



Slika 4: Orbita čestice nakon rotacije četvero-vektora brzine u $t'x'$ ravnini za kut $\theta = \frac{3\pi}{2}$.



Slika 5: Familija orbita čestice različitog ekscentriciteta s istom energijom nakon rotacije četvero-vektora brzine u $t'x'$ ravnini.

4.2.3 Hiperbolne orbite

Kada je energija negativna ($E < 0$), mijenjaju se definicije karakterističnih veličina [5] :

$$
\begin{aligned}
V &= \sqrt{\frac{2E}{m}} \\
R &= \frac{k}{2E} \\
T &= \frac{R}{V} = k\sqrt{\frac{m}{8E^3}}
\end{aligned}
$$

U ovoj će se situaciji samo promijeniti predznaci u jednadžbama pa se na isti način, kao i u eliptičnom slučaju, dobiva jednadžba za energiju

$$V^2(t' + T)^2 - (\mathbf{r}')^2 = R^2. \tag{4.57}$$

Jednadžba (4.57) je jednadžba hiperboloida s dvije plohe i s centrom u $-T\mathbf{e}_t$ [5] . Jednadžbe gibanja se dobivaju na isti način kao i u eliptičnom slučaju, jedina razlika je promjena predznaka.

$$\sqrt{v^\mu v_\mu} = R \tag{4.58}$$

$$\frac{d^2 v^\mu}{d\lambda^2} = v^\mu \tag{4.59}$$

Vektor $\mathbf{v}$ opisuje veliku hiperbolu, odnosno geodezik na 4D hiperboloidu.

5 Zaključak

Pokazali smo da je u Keplerovom problemu uz energiju i angularni moment, očuvan i Laplace-Runge-Lenz vektor. Komponente LRL vektora, zajedno s komponentama angularnog momenta, čine Liejevu algebru grupe $SO(4)$ za zatvorene orbite i Liejevu algebru grupe $SO(3,1)$ za hiperbolne orbite. U slučaju zatvorenih orbita, Keplerov problem možemo promatrati kao gibanje četvero-vektora brzine po hipersferi radijusa R tako da njegov iznos i smjer ostaju nepromijenjeni. Projekcijom na 3D prostor dobivaju se elipse koje rješavaju Keplerov problem. Djelovanjem elemenata grupe $SO(4)$ dolazi do promjene ekscentriciteta orbite, te se orbita rotira, tako da ukupna energija ostaje ista. LRL vektor je generator orbita različitog ekscentriciteta ali s istom energijom. Ovdje je bitno napomenuti važnost reparametrizacije. U klasičnoj mehanici putanju čestice opisujemo sa $\mathbf{r}(t)$, a vrijeme koristimo kao parametar krivulje. No to je samo naš izbor, pa se putanja može reparametrizirati po nekom drugom parametru, što je nedovoljno naglašeno. LRL vektor se može definirati i u Kvantnoj mehanici u slučaju vodikovog atoma, gdje nam služi za pronalazak energetskih razina elektrona [2] .

Literatura

[1] John C. Baez. Mysteries of the gravitational 2-body problem, 2022.

[2] Arno Böhm. *Quantum mechanics: foundations and applications.* Springer Science & Business Media, 2013.

[3] Sergi Escanes Domingo. Laplace-runge-lenz vector.

[4] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. Classical mechanics, 2002.

[5] Jesper Göransson. Symmetries of the kepler problem. march 8 2015.

[6] K Horvatic. Linearna algebra. *PMF-Matematicki odjel, Zagreb*, 1995.

[7] Roger Howe. Very basic lie theory. *The American Mathematical Monthly*, 90(9):600–623, 1983.

[8] Zoran Kaliman. *Teorijska mehanika.* Filozofski fakultet Sveučilišta u Rijeci, 2002.

[9] Alexander A Kirillov. *An introduction to Lie groups and Lie algebras*, volume 113. Cambridge University Press, 2008.

[10] Hrvoje Kraljević. *Liejeve algebre.* 2010.

[11] Bernard F Schutz and Director Bernard F Schutz. *Geometrical methods of mathematical physics.* Cambridge university press, 1980.

[12] J Villanueva. Geodesics on surfaces by variational calculus.